# TD 4 : dénombrabilité, sommation

## Exercice 1

1. Comptine : 0, $-1$, 1, $-2$, 2, $-3$, 3, etc. Formaliser pour établir une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2. (a) Soit $n$ un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels $(a, b)$ tel que $n = 2^a(2b + 1)$.
   (b) En déduire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Autrement dit, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. (a) Soit $A$ l'ensemble des couples $(s, t)$ d'entiers naturels tels que $t \leq s$. Dessiner $A$.
   (b) Montrer que l'application suivante est une bijection et expliciter la bijection réciproque :
   $$g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow A, \quad (m, n) \longmapsto (m + n, n).$$
   (c) Pour $s$ entier, on note $u_s = s(s+1)/2$. Calculer $u_{s+1} - u_s$. Montrer que la suite $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que pour tout entier $N$, il existe un unique $s$ tel que $u_s \leq N < u_{s+1}$.
   (d) Montrer enfin que l'application suivante est une bijection et décrire sa réciproque :
   $$h : A \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (s, t) \longmapsto \frac{s(s + 1)}{2} + t.$$
   (e) Calculer $h \circ g(m, n)$ pour $m$ et $n$ inférieurs à 4. *On écrira le résultat dans un tableau.*

## Exercice 2

Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$.

1. Montrer que si $E$ et $A$ sont finis et non vides, alors $E \setminus A$ n'est pas en bijection avec $E$.
2. On suppose que $E$ est dénombrable.
   (a) Montrer que si $A$ est finie, alors $E \setminus A$ est en bijection avec $E$.
   (b) Vérifier que si $A$ est infinie, tout peut arriver : $E \setminus A$ peut être en bijection avec $E$, ou pas.
3. On suppose que $E$ n'est pas dénombrable. Montrer que si $A$ est (au plus) dénombrable, alors $E \setminus A$ est en bijection avec $E$.

## Exercice 3

Justifier que les familles suivants sont sommables et calculer leur somme :

1. $\left(\dfrac{a^p b^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, où $a, b$ sont deux réels fixés.
2. $\left(\dfrac{q^p a^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, où $a$ est un réel fixé.

## Exercice 4

Sachant que $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i + j + 1)^3}.$$