

Contrôle terminal de Probabilités Avancées - Janvier 2026 - 2h

Calculatrice type collège ou en mode examen autorisée. Documents interdits.

Toute réflexion sera prise en compte.

*Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans **n'importe quel ordre**.
Les réponses aux questions peuvent également être fournies dans n'importe quel ordre,
à condition de **clairement indiquer** leur numéro et l'exercice correspondant.
Le barème indiqué est **indicatif** et est susceptible de varier légèrement.*

Exercice 1 Questions de calcul - 5 points

1. **Calculer** la fonction caractéristique de la loi géométrique de paramètre p .
2. On rappelle que pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de X . Calculer la fonction caractéristique de $-2X + Y$.
3. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	5
-2	1/6	1/2
1	1/4	1/12

Calculer la fonction caractéristique $\Phi_{(X,Y)}(t, u)$ de (X, Y) .

4. Soit f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{C} y(e^x + 1) & \text{si } (x, y) \in [0, \ln(2)] \times [0, 3\sqrt{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

où C est une constante réelle.

Quelle valeur de C doit-on choisir pour que f soit une densité ?

5. **Question de cours :** Quelles propriétés doit vérifier une fonction quelconque $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ pour être une fonction de répartition d'un **couple** de variables aléatoires réels ?

Exercice 2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* - 8.5 points

Soit X une variable aléatoire réelle qui admet une espérance μ et une variance σ^2 .

1. **Question de cours :** Donner l'inégalité de Markov.
2. A partir de l'inégalité de Markov, montrer l'inégalité suivante :

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}[(X - \mu)^2 \geq \alpha^2] \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},$$

puis en déduire que

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}[|X - \mu| \geq \alpha] \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. La Française des Jeux souhaite tester le tirage de son nouveau jeu à gratter. Sur 1000 tickets, il est supposé y avoir 4 tickets gagnants. On note p la réelle probabilité de gain, et on veut s'assurer que p correspond bien à l'attente de la Française des Jeux.
Pour faire ses tests, elle demande à des employés de prélever aléatoirement des tickets imprimés, et d'indiquer s'il est gagnant ou non. On pose $X_k = 1$ si le k -ème ticket est gagnant, et $X_k = 0$ s'il est perdant. $X_1, X_2, \dots$ sont supposés indépendants.
 - (a) On effectue le test de n tickets, donner la loi de la variable aléatoire comptant le nombre de tickets gagnants obtenus.
 - (b) Exprimer F_n la fréquence de tickets gagnants en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$ puis calculer son espérance et sa variance.
 - (c) D'après la loi des grands nombres, que sait-on sur la limite de F_n ? Préciser le(s) type(s) de limite.
 - (d) La Française des Jeux a une tolérance de 1/1000 sur la fréquence de tickets gagnants.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev écrite ci-dessus, combien de tirage doit-on effectuer pour affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 1% que la fréquence de gain diffère de 4/1000 d'au plus 1/1000 ?
 - (e) Appliquer le Théorème Central Limite à F_n .

Exercice 3 *Circulation automobile - 6.5 points*

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et que $\mathbb{P}(Y = 0 | X = 0) = 1$.

1. Donner la loi jointe de (X, Y) , c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = n, Y = k)$, en précisant les valeurs possibles pour n et k .
2. On **admet** que Y suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
Montrer que

$$\forall n \geq k \geq 0, \mathbb{P}(X = n | Y = k) = e^{-(1-p)\lambda} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!}.$$

3. On pose $Z = X - k$. Quelle est la loi de Z sachant $Y = k$? A-t-elle un nom ?
Donner l'espérance de Z sachant $Y = k$.
4. En déduire que $\mathbb{E}(X | Y = k) = k + (1-p)\lambda$.
5. **Application :** On surveille la circulation sur une route avant une intersection, et on note X le nombre de voitures arrivant en une heure. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 100.
Les véhicules ont ensuite le choix entre deux directions A et B . Chacun choisit A avec la probabilité $1/3$ indépendamment des autres véhicules.
 - (a) Justifier qu'on est bien dans la situation décrite en début d'exercice.
 - (b) Pendant une heure, un observateur compte les voitures partant dans la direction A sans considérer les autres, et en observe 150. En sachant cela, quel est le nombre moyen de voitures qui ont circulé sur la route avant l'intersection ?

Solutions des exercices

Solution 1

1. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, pour $p \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} (1-p)^{k-1} p \\ &= p e^{it} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{it}(1-p))^{k-1} = p e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{it}(1-p))^k \\ &= p e^{it} \times \frac{1}{1 - e^{it}(1-p)} \quad \text{car } |e^{it}(1-p)| < 1\end{aligned}$$

2. On a $-X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, indépendants.

$$\Phi_{-2X}(t) = \mathbb{E}[e^{-2iXt}] = \Phi_X(-2t) = e^{-2t^2}.$$

$$\begin{aligned}\Phi_{-2X+Y}(t) &= \Phi_{-2X}(t) \Phi_Y(t) \\ &= \Phi_X(-2t) \Phi_Y(t) \\ &= e^{-2t^2} e^{-t^2/2} \\ &= e^{-5t^2/2}.\end{aligned}$$

3. On a

$$\Phi_{(X,Y)}(t, u) = \frac{1}{6} e^{-2it} + \frac{1}{4} e^{it} + \frac{1}{2} e^{i(-2t+5u)} + \frac{1}{12} e^{i(t+5u)}$$

4. On a

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{\ln 2} \int_{y=0}^{3\sqrt{2}} y(e^x + 1) dx dy &= \int_{x=0}^{\ln 2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{3\sqrt{2}} (e^x + 1) dx \\ &= \int_{x=0}^{\ln 2} 9(e^x + 1) dx \\ &= 9[e^x + x]_0^{\ln 2} = 9(2 + \ln(2) - 1) = 9(1 + \ln(2))\end{aligned}$$

Comme f est une densité, la double intégrale doit valoir 1. On pose donc $C = 9(1 + \ln(2))$.

5. • G est à valeurs dans $[0, 1]$.
- A y_0 fixé dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto G(x, y_0)$ est croissante et cadlag.
- A x_0 fixé dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto F(x_0, y)$ est croissante et cadlag.
- On a
- à y_0 fixé, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y_0) = 0$.
 - à x_0 fixé, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x_0, y) = 0$.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$.
- On a également

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, x' > x, y' > y, F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) \geq 0.$$

Solution 2

1. On a

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}.$$

2. Soit $Y = (X - \mu)^2$. Y est d'espérance σ^2 .

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0, \mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) &= \mathbb{P}(Y \geq \alpha^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{\alpha^2} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) = \mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq \alpha^2) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

3. (a) Comme les tickets tirés sont indépendants et ont chacun une probabilité p d'être gagnant, le nombre total de tickets gagnants suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

- (b) On définit $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

$$\text{On a } \mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = p.$$

$$\text{Et } \text{Var}(F_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{k=1}^n X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = \frac{p(1-p)}{n}, \text{ par indépendance.}$$

- (c) Comme les X_k sont i.i.d et dans L^1 , d'après la loi des grands nombres, on a F_n qui tend presque sûrement, dans L^1 et en probabilité vers p .

(d) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq \alpha) \leq \frac{\text{Var}(F_n)}{\alpha^2}$$

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq \alpha) \leq \frac{p(1-p)}{\alpha^2 n}.$$

On souhaite s'assurer que $\mathbb{P}(|F_n - 1/250| \geq 0.001) \leq 0.01$.

On veut donc, pour $\alpha = 0.001$ et $p = 1/250$, avoir

$$\frac{p(1-p)}{\alpha^2 n} \leq 0.01.$$

Ainsi

$$n \geq \frac{p(1-p)}{\alpha^2 \times 0.01} = \frac{\frac{4 \times 996}{1000^2}}{(10^{-3})^2 \times 0.01} = 4 \times 996 \times 100 \simeq 4 \times 10^5.$$

(e) Les X_i sont dans L^2 .

$$p(1-p) = 4 \times 996 = 4^2 \times 3 \times 83 = 3984 \simeq 63^2$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var}(X_1)}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - \frac{n}{250} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\frac{\sqrt{n}}{63} \left(F_n - \frac{1}{250} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Solution 3

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n, Y = k) &= \mathbb{P}(Y = k | X = n) \mathbb{P}(X = n) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(n-k)! k!} \lambda^n p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

et pour $n = 0$, $k = 0$: $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$.

2. On a pour $n \geq k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n|Y = k) &= \frac{\mathbb{P}(X = n, Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\ &= \frac{\frac{1}{(n-k)!k!} \lambda^n p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}}{p^k \lambda^k \frac{1}{k!} e^{-p\lambda}} \\ &= \frac{1}{(n-k)!} \lambda^{n-k} (1-p)^{n-k} e^{-(1-p)\lambda}\end{aligned}$$

3. On a pour $j \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z = j|Y = k) = \mathbb{P}(X = k + j|Y = k) = \frac{1}{j!} \lambda^j (1-p)^j e^{-(1-p)\lambda}.$$

C'est une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$.

On a donc $\mathbb{E}(Z|Y = k) = (1-p)\lambda$.

4.

$$\mathbb{E}(X|Y = k) = \mathbb{E}(Z + k|Y = k) = k + (1-p)\lambda.$$

5. (a)

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Y le nombre de voiture qui partent vers la direction A . Expérience indépendante renouvelée, il s'agit donc d'une loi binomiale de paramètres (n, p) lorsque X vaut n .

(b) $\lambda = 100$, $k = 150$, $p = 1/3$ donc $\mathbb{E}(X) = 150 + 100 \times 2/3 \simeq 216$.