Les équations du chemostat

Un chemostat est un appareil de laboratoire (de type bioréacteur) dans lequel poussent, de façon contrôlée, des organismes (bactéries, phytoplancton).

On met en entrée des nutriments notés s et on s'intéresse à la croissance ou l'extinction d'une population de bactéries notée x. On a les équations suivantes

$$\begin{cases} s' = D(s_0 - s) - \dfrac{as}{b+s}x \\ x' = e\dfrac{as}{b+s}x - Dx \end{cases}$$

Les nutriments sont introduits avec un flux constant Ds_0, se dégradent à taux D et sont consommés par les bactéries dans une cinétique dite de Monod. Les bactéries meurent à taux D et se reproduisent selon l'énergie apportée par les nutriments avec un rendement e (typiquement inférieur à 1). Tous les paramètres (a, b, D, e, s_0) sont pris strictement positifs.

1. Donner les équations satisfaites par les équilibres du système.
2. Montrer qu'il existe un équilibre $(\bar{s}, \bar{x})$ à composantes strictement positives $(\bar{s} > 0, \bar{x} > 0)$ si et seulement si $e\frac{as_0}{b+s_0} > D\ (Hyp)$. (On ne demande pas de calculer l'équilibre en question).
3. Existe-t-il un équilibre si cette condition (Hyp) n'est pas satisfaite ?
4. On note A la fonction $A : s \mapsto \frac{as}{b+s}$. Déterminer la jacobienne J autour de l'état d'équilibre $(\bar{s}, \bar{x})$ où on pourra noter les coefficients de la matrice en fonction notamment des paramètres et de $\bar{s}, \bar{x}, A(\bar{s}), A'(\bar{s})$.
5. Montrer que dans le cas de l'équilibre à composantes strictement positives, on a $J_{22} = 0$
6. Montrer que les valeurs propres de la jacobiennes vérifient l'équation
$$\lambda^2 + (D + A'(\bar{s})\bar{x})\lambda + eA(\bar{s})A'(\bar{s})\bar{x} = 0$$
7. En utilisant l'équation de l'équilibre pour simplifier le dernier terme, justifier que les racines du polynôme sont $-D\ et\ -A'(\bar{s})\bar{x}$
8. Que peut on en déduire pour la stabilité de l'équilibre en question ?
9. On généralise le système avec deux espèces notées 1 et 2. On a le système

$$\begin{cases} s' = D(s_0 - s) - A(s)x_1 - A(s)x_2 \\ x_1' = e_1 A(s)x_1 - Dx_1 \\ x_2' = e_2 A(s)x_2 - Dx_2 \end{cases}$$

On suppose $e_1 > e_2$. Justifier le fait qu'on ne peut pas avoir un équilibre avec toutes les composantes strictement positives. (principe d'exclusion compétitive).