

Contrôle terminal de Probabilités Avancées - Janvier 2026 - 2h

Calculatrice type collège ou en mode examen autorisée. Documents interdits.

Toute réflexion sera prise en compte.

*Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans **n'importe quel ordre**.
Les réponses aux questions peuvent également être fournies dans n'importe quel ordre,
à condition de **clairement indiquer** leur numéro et l'exercice correspondant.
Le barème indiqué est **indicatif** et est susceptible de varier légèrement.*

Exercice 1 Questions de calcul - 5 points

1. **Calculer** la fonction caractéristique de la loi géométrique de paramètre p .
2. On rappelle que pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de X . Calculer la fonction caractéristique de $-2X + Y$.
3. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	5
-2	1/6	1/2
1	1/4	1/12

Calculer la fonction caractéristique $\Phi_{(X,Y)}(t, u)$ de (X, Y) .

4. Soit f donnée par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{C} y(e^x + 1) & \text{si } (x, y) \in [0, \ln(2)] \times [0, 3\sqrt{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

où C est une constante réelle.

Quelle valeur de C doit-on choisir pour que f soit une densité ?

5. **Question de cours :** Quelles propriétés doit vérifier une fonction quelconque $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ pour être une fonction de répartition d'un **couple** de variables aléatoires réels ?

Exercice 2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* - 8.5 points

Soit X une variable aléatoire réelle qui admet une espérance μ et une variance σ^2 .

1. **Question de cours :** Donner l'inégalité de Markov.
2. A partir de l'inégalité de Markov, montrer l'inégalité suivante :

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}[(X - \mu)^2 \geq \alpha^2] \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2},$$

puis en déduire que

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}[|X - \mu| \geq \alpha] \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. La Française des Jeux souhaite tester le tirage de son nouveau jeu à gratter. Sur 1000 tickets, il est supposé y avoir 4 tickets gagnants. On note p la réelle probabilité de gain, et on veut s'assurer que p correspond bien à l'attente de la Française des Jeux.
Pour faire ses tests, elle demande à des employés de prélever aléatoirement des tickets imprimés, et d'indiquer s'il est gagnant ou non. On pose $X_k = 1$ si le k -ème ticket est gagnant, et $X_k = 0$ s'il est perdant. $X_1, X_2, \dots$ sont supposés indépendants.
 - (a) On effectue le test de n tickets, donner la loi de la variable aléatoire comptant le nombre de tickets gagnants obtenus.
 - (b) Exprimer F_n la fréquence de tickets gagnants en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$ puis calculer son espérance et sa variance.
 - (c) D'après la loi des grands nombres, que sait-on sur la limite de F_n ? Préciser le(s) type(s) de limite.
 - (d) La Française des Jeux a une tolérance de 1/1000 sur la fréquence de tickets gagnants.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev écrite ci-dessus, combien de tirage doit-on effectuer pour affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 1% que la fréquence de gain diffère de 4/1000 d'au plus 1/1000 ?
 - (e) Appliquer le Théorème Central Limite à F_n .

Exercice 3 *Circulation automobile - 6.5 points*

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et que $\mathbb{P}(Y = 0 | X = 0) = 1$.

1. Donner la loi jointe de (X, Y) , c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = n, Y = k)$, en précisant les valeurs possibles pour n et k .
2. On **admet** que Y suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
Montrer que

$$\forall n \geq k \geq 0, \mathbb{P}(X = n | Y = k) = e^{-(1-p)\lambda} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!}.$$

3. On pose $Z = X - k$. Quelle est la loi de Z sachant $Y = k$? A-t-elle un nom ?
Donner l'espérance de Z sachant $Y = k$.
4. En déduire que $\mathbb{E}(X | Y = k) = k + (1-p)\lambda$.
5. **Application :** On surveille la circulation sur une route avant une intersection, et on note X le nombre de voitures arrivant en une heure. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 100.
Les véhicules ont ensuite le choix entre deux directions A et B . Chacun choisit A avec la probabilité $1/3$ indépendamment des autres véhicules.
 - (a) Justifier qu'on est bien dans la situation décrite en début d'exercice.
 - (b) Pendant une heure, un observateur compte les voitures partant dans la direction A sans considérer les autres, et en observe 150. En sachant cela, quel est le nombre moyen de voitures qui ont circulé sur la route avant l'intersection ?