Bloc 1 – Mathématiques – Copie 2

On se propose d'étudier un modèle représentant une communauté de plantes et de pollinisateurs. On note $u(t)$ la quantité de pollinisateurs au temps t et $v(t)$ celle de plantes. Le système d'équations représentant la dynamique est le suivant :

$$\begin{cases} u'(t) &= (5v(t)-2)u(t) - u(t)^2 \\ v'(t) &= \left(\dfrac{9u(t)}{1+u(t)} - 1 - 3u(t)\right)v(t) - v(t)^2 \end{cases} \tag{1}$$

1. On se propose dans un premier temps d'étudier la fonction $f(x) = \frac{9x}{1+x} - 1 - 3x$ sur l'ensemble des réels positifs $[0,+\infty)$.
   a. Donner la dérivée de la fonction f.
   b. Trouver les points pour lesquels la dérivée s'annule et en déduire l'ensemble des $x \geq 0$ pour lesquels f' est positive.
   c. En déduire les variations de f.
   d. Calculer les valeurs de f en 0,1 et 2 et dessiner l'allure de f sur le schéma (cf Annexes figure 1)

2. On s'intéresse aux équilibres du système complet (1).
   – Vérifier que $(1/2,1/2)$ est un équilibre.
   – Donner les équilibres du système possédant au moins une coordonnée nulle.
   – Donner l'ensemble des équilibres et indiquer quels sont les équilibres pertinents pour notre problème.

3. On s'intéresse au système au voisinage de l'équilibre $(1/2,1/2)$. On admet que (1) est équivalent au système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \text{ la matrice } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

c'est-à-dire qu'ils ont un comportement similaire en terme de stabilité.
   a. Donner les valeurs propres de A.
   b. Expliciter les vecteurs propres de A.
   c. On s'intéresse au système (2) avec la condition initiale $u(0) = 1$ et $v(0) = \sqrt{5}$. Montrer que la solution de ce système est

$$\begin{cases} u(t) &= 3e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} - 2e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}, \\ v(t) &= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(3e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} + 2e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t}\right). \end{cases}$$

   d. Conclure sur la stabilité du système (1) autour du point $(1/2,1/2)$.

4. (Question difficile) Tracer le plan de phase du système complet (1) sur la figure 2 en annexe

Annexes - Mathématiques

Prénom :   Nom :

Figure 1 (Question 1d)

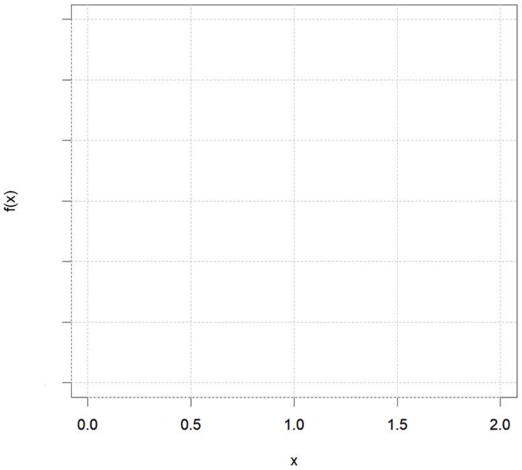
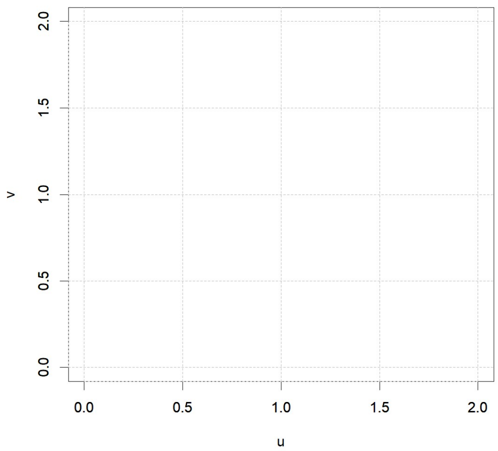


Figure 2 (Question 4)



On se propose d'étudier un modèle représentant une interaction en tumeur et système immunitaire. En l'absence d'action du système immunitaire, la tumeur $y(t)$ croit de façon logistique. L'action du système immunitaire $z(t)$ est modélisée par un terme de mort (loi d'action de masse).

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - \mu y(t)z(t)$$

L'évolution du nombre de cellules immunitaires $z(t)$ sera décrite par une loi de la forme suivante

$$z'(t) = z(t)m(y(t))$$

On arrive donc

Nous verrons dans le problème différentes versions de m : une version saturée

$$m_1(y) = \frac{2y}{1+y} - 1$$

Une version alternative consiste à prendre en compte un mécanisme d'immunosuppression pour les grandes tailles de tumeur

$$m_2(y) = \frac{2by}{y^2+c} - 1$$

Les paramètres sont tous strictement positifs. On pourra utiliser les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie 0

1) Démontrer le résultat suivant : pour une matrice Pour une matrice de taille 2 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ satisfaisant $\alpha + \delta < 0$, on a deux valeurs propres à partie réelle négative si $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ et deux valeurs propres réelles de signe distinct (notamment une strictement positive) si si $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$.

2) Le système admet un équilibre sans cellules $(0,0)$. Justifier que la jacobienne autour de cet équilibre s'écrit $\begin{pmatrix} \mathrm{r} & 0 \\ 0 & \mathrm{m}(0) \end{pmatrix}$

3) En déduire que cet équilibre est toujours instable.

4) Montrer que pour un équilibre $(\bar{y}, \bar{z})$ à composantes strictement positives $\bar{y} > 0, \bar{z} > 0$, la jacobienne autour de l'équilibre peut se simplifier en utilisant les équations de l'équilibre en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} -\mathrm{r}\,\frac{\bar{y}}{\mathrm{K}} & -\mu\,\bar{y} \\ \bar{z}m'(\bar{y}) & 0 \end{pmatrix}$ où $m'(\bar{y})$ est la dérivée de m.

Première partie $m = m_1$

1) Donner l'ensemble des équilibres du système avec $m = m_1$. Sont-ils tous pertinents si $K < 1$? Pourquoi ?

2) On se place dans le cas $r = 1, K = 2, \mu = \frac{1}{2}$. Faire l'analyse de plan de phase du système (question difficile)

3) A-t-on un équilibre à composantes strictement positives ? Si non, justifier. Si oui, donner déterminer sa stabilité

Deuxième partie $m = m_2$

On garde les paramètres de la question 2 et on précise $b = 1, c = \frac{3}{4}$

1) Montrer que l'équation $m_{2(x)} = 0$ possède deux solutions strictement positives que l'on précisera. On les notera x_-, x_+
2) Montrer que le système possède 5 équilibres que l'on précisera (3 ont au moins une composante nulle, on pourra éventuellement utiliser directement les notations $x_\pm$ pour certains).
3) En utilisant la question 3 de la partie 0, montrer qu'un des équilibres sans composantes nulles est stable et l'autre non.
4) Faire l'analyse de plan de phase du système (difficile).