

Contrôle partiel de Probabilités Avancées - Novembre 2025 - 1h

Calculatrice type collège ou en mode examen autorisée. Documents interdits.

Toute réflexion sera prise en compte.

*Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans **n'importe quel ordre**. Les réponses aux questions peuvent également être fournies dans n'importe quel ordre, à condition de **clairement indiquer** leur numéro et l'exercice correspondant. Le barème indiqué est **indicatif** et est susceptible de varier légèrement.*

*Le sujet est **long** et pour plus de 20 points. N'hésitez pas à **passer à la question suivante** en cas de blocage.*

Exercice 1 Lois usuelles - 4 points

1. Donner une façon de simuler une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, avec des dés, des pièces ou des urnes. (Une seule façon)
2. Donner une façon de simuler une loi géométrique de paramètre $1/2$, avec des dés, des pièces ou des urnes. (Une seule façon)
3. Pour la loi de Poisson de paramètre λ
 - (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire et donner la loi de probabilité.
 - (b) **Calculer** son espérance. Une formule donnée sans justification ne sera pas admise.

Exercice 2 *Déménagement* - 4 points

Vous avez besoin d'aide pour déménager. Lorsque vous demandez à un de vos amis, il y a une chance sur deux qu'il accepte. On suppose que les réponses de vos amis sont indépendantes les unes des autres.

On suppose que vous avez n amis que vous pouvez contacter. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis qui acceptent de vous aider.

1. Quelle est la loi de X ? En moyenne, combien aurez-vous d'amis d'accord pour vous aider ?
2. C'est l'été et $n = 3$ parce que la majorité de vos connaissances sont hors de Lyon en cette saison.
 - (a) Calculer la probabilité que vous ayez au plus un ami qui accepte.
 - (b) Calculer la probabilité que vos 3 amis vous aident.

Exercice 3 *Variable continue* - 5 points

Soit $f : x \mapsto (1 - \alpha x)\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$.

1. Pour quelle valeur de α , f est-elle une fonction de densité ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\text{Var}(X)$.

Exercice 4 Fonctions de répartition - 10 points

Soit

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 0.1y^2 & \text{si } x \in [0, 1[\text{ et } y \in [0, 1[\\ 0.1 & \text{si } x \in [0, 1[\text{ et } y \geq 1 \\ y & \text{si } x \in [1, \infty[\text{ et } y \in [0, 1[\\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque qu'on peut également écrire

$$F(x, y) = 0.1 \min(y^2, 1) \mathbb{1}(\{x \in [0, 1[, y \in \mathbb{R}^+\}) + \min(y, 1) \mathbb{1}(\{x \in [1, \infty[, y \in \mathbb{R}^+\}).$$

1. **Question de cours :** Quelles propriétés doit vérifier F pour être une fonction de répartition ?

Application : Montrer qu'elles sont vérifiées et que F est une fonction de répartition.

2. Soit un couple (X, Y) qui a pour fonction de répartition F .
 - (a) Calculer la fonction de répartition marginale de X .
 - (b) Est-ce que X est une variable aléatoire discrète ? Continue ? Quelles valeurs peut-elle prendre ?
 - (c) Calculer la fonction de répartition marginale de Y .
 - (d) Est-ce que Y est une variable aléatoire discrète ? Continue ? Quelles valeurs peut-elle prendre ?
 - (e) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solutions des exercices

Solution 1

1. On considère une pièce non truquée. On considère une victoire si on tombe sur Pile, dans ce cas $X = 1$. C'est une défaite sinon et $X = 0$. Alors le lancer d'une pièce peut être modélisé par une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
2. On considère une pièce non truquée. On considère une victoire si on tombe sur Pile. Alors le nombre de lancers d'une pièce avant d'atteindre Pile peut être modélisé par une loi géométrique de paramètre $1/2$.
3. (a) Une variable de Poisson admet des valeurs sur $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

(b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) \text{ pour } k = 0, \text{ le terme s'annule} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \lambda\end{aligned}$$

Solution 2

1. **Remarque : j'attendais ici une ou deux phrases pour justifier et expliquer.** Loi binomiale de paramètre $(n, 1/2)$.
On a $np = n/2$ ici.

2. (a)

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1p^0(1-p)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 3p^1(1-p)^{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\mathbb{P}(X = 3) = 1p^n(1-p)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Solution 3

1. f est positive sur $\mathbb{R}$ ssi $1 - \alpha \times 2 \geq 0$, donc $\alpha \leq 1/2$.

$$\int_0^2 (1 - \alpha x) dx = \left[x - \frac{\alpha x^2}{2} \right]_0^2 = 2 - \frac{4\alpha}{2} = 2(1 - \alpha)$$

Donc $\alpha = 1/2$.

2.

$$\int_0^2 (x - \alpha x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8\alpha}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 (x^2 - \alpha x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{4} = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}$$

donc

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9}.$$

Solution 4

1. **Remarque : cette question était sur 4.5 points, dont uniquement 0.5 pour donner les propriétés. C'était 4 points pour les prouver.**

- Comme y^2 est à valeurs dans $[0, 1]$ quand $y \in [0, 1]$, F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- A y_0 fixé dans $\mathbb{R}^+$,

$$x \mapsto F(x, y_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 \min(y_0^2, 1) & \text{si } x \in [0, 1[\\ \min(y_0, 1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est croissante et cadlag (constante par morceaux).

Pour $y_0 < 0$, elle est constante et nulle (donc croissante et cadlag).

- A x_0 fixé dans $[0, 1[$,

$$y \mapsto F(x_0, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 0.1y^2 & \text{si } y \in [0, 1[\\ 0.1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

est croissante, continue donc cadlag. De même pour $x_0 \geq 1$, et $x_0 < 0$.

- Nous vérifions les limites :
 - à y_0 fixé, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y_0) = 0$.
 - à x_0 fixé, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x_0, y) = 0$.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$.
- Il faut maintenant vérifier que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, x' > x, y' > y, F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) \geq 0.$$

Pour simplifier la vérification, on remarque qu'on peut écrire $F(x, y) = 0.1 \min(y^2, 1) \mathbf{1}(x \in [0, 1[, y \in \mathbb{R}^+) + \min(y, 1) \mathbf{1}(x \in [1, \infty[, y \in \mathbb{R}^+)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' > x$ et $y' > y$.

- Soit $y < 0$ et $y' < 0$. On a $F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) = 0$.
- Soit $y < 0$ et $y' \geq 0$. On a $F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) = F(x', y') - F(x, y')$. Comme à y_0 fixé, $x \mapsto F(x, y_0)$ est croissante, cette quantité est positive.
- On suppose $y' > y \geq 0$. Supposons que x et x' soient dans $[0, 1[$. $F(x', y') - F(x, y') = 0$ et $F(x', y) - F(x, y) = 0$ donc la quantité est nulle.
- On suppose $y' > y \geq 0$. Supposons que x et x' soient dans $[1, \infty[$. Même raisonnement que ci-dessus.

– On suppose $y' > y \geq 0$ et $x < 1 \geq x'$. Alors :

$$\begin{aligned} F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) \\ &= \min(y', 1) - \min(y, 1) - 0.1 \min(y'^2, 1) + 0.1 \min(y^2, 1) \\ &= \begin{cases} y' - y - 0.1y'^2 + 0.1y^2 \geq 0 & \text{si } y' < 1 \\ 1 - y - 0.1 + 0.1y^2 = 0.9 - (y - 0.1y^2) \geq 0 & \text{si } y' \geq 1 > y \\ 0 & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc F est bien une fonction de répartition.

2. (a) On a d'après le cours $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$.
Donc on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0. \\ 0.1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (b) F_X est constante par morceaux. Ainsi X peut prendre les valeurs $\{0, 1\}$.
C'est une loi binomiale de paramètre 0.9.
(c) On a d'après le cours $\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$.
Donc on a

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0. \\ y & \text{si } y \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

- (d) F_Y est une fonction dérivable et continue sur $[0, 1]$. Ainsi Y est une variable continue qui prend ses valeurs sur $[0, 1]$. C'est une loi uniforme (bonus).
(e) Il suffit de prendre $x \in [0, 1[$ et $y \in [0, 1[$ pour voir que

$$F_X(x)F_Y(y) = 0.1y \neq 0.1y^2.$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.