

Résumé sur les nombres complexes

Introduction

A la place de travailler sur $\mathbb{R}^2$, on peut travailler sur $\mathbb{C}$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $z = x + iy$.

On peut ensuite définir l'addition (comme dans le plan $\mathbb{R}^2$) :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Et la multiplication (qui n'aurait pas vraiment de sens dans le plan) :

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2)$$

Nombre i

i est un nombre un peu particulier. Il est tel que $i^2 = -1$.

Lorsqu'on le rencontre dans des formules, soit il apparait comme i et on le laisse comme tel, soit il apparait à une certaine puissance et on le simplifie (ex : $i^3 = i^2 \times i = -i$).

On peut le voir comme une inconnue un peu étrange.

Attention, on n'écrit **jamais** $i = \sqrt{-1}$.

Partie réelle, partie imaginaire

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit toujours de façon **unique** $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

x est appelée *partie réelle* de z ($\text{Re}(z)$) et y est appelée *partie imaginaire* de z ($\text{Im}(z)$).

Si $\text{Im}(z) = 0$, alors z est un réel.

Si $\text{Re}(z) = 0$, alors $z = iy$ est un *imaginaire pur*.

Conjugué de z

On appelle *conjugué* de $z = x + iy$ le nombre $x - iy$. Il est toujours écrit $\bar{z}$. On a :

$$\begin{aligned}\overline{(\bar{z})} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \times z_2} &= \bar{z}_1 \times \bar{z}_2\end{aligned}$$

Module de z

L'équivalent de la valeur absolue pour les nombres complexes est le *module*. On le note $|z|$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On a $|z| \geq 0$, et en particulier $|z| = 0$ ssi $z = 0$.

On a également :

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\ z \times \bar{z} &= |z|^2 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |e^{iy}| &= 1 \text{ quelque soit } y \in \mathbb{R} \\ |e^{x+iy}| &= e^x \end{aligned}$$

Dans les fonctions

Lorsque vous tomberez sur des fonctions du type $f(x) = 2x^2 + 3ix$ ou $g(x) = e^{2ix}$, elles seront à valeurs complexes.

Dans notre cadre, il faut considérer i comme une constante et tout se passe bien pour les dérivées, les primitives, etc.

Par exemple, $f'(x) = 4x + 3i$ et $g'(x) = 2ie^{2ix}$.

Exercice 1 *Quelques manipulations et calculs*

1. Simplifier $-1/i$
2. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module des nombres suivants :

$$z_1 = -2i + 5, z_2 = 15, z_3 = 3i, z_4 = i(2 + 3i)$$

3. Simplifier les nombres suivants :

$$z_1 = (2 + 5i) + (i + 3), z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i), z_3 = (2 - i)(3 + 8i),$$

$$z_4 = (1 - i)\overline{(1 + i)}, z_5 = i(1 - 3i)^2$$

Solution 1

1. $-1/i = -i/(i^2) = -i/(-1) = i$.
2. (a) $\operatorname{Re}(z_1) = 5, \operatorname{Im}(z_1) = -2, \bar{z}_1 = 5 + 2i$
(b) $\operatorname{Re}(z_2) = 15, \operatorname{Im}(z_2) = 0, \bar{z}_2 = 15$.
(c) $\operatorname{Re}(z_3) = 0, \operatorname{Im}(z_3) = 3, \bar{z}_3 = -3i$.
(d) En effectuant le produit, on trouve $z_4 = 2i - 3$, et donc $\operatorname{Re}(z_4) = -3, \operatorname{Im}(z_4) = 2, \bar{z}_4 = -3 - 2i$.
3. (a) On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve $z_1 = 5 + 6i$.
(b) De la même façon, $z_2 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i$.
(c) On développe, puis on regroupe pour trouver : $z_3 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i$.
(d) On écrit $z_4 = (1 - i)\overline{(1 + i)} = (1 - i)(1 - i) = 1 - 2i - 1 = -2i$.
(e) On commence par calculer $(1 - 3i)^2$:

$$(1 - 3i)^2 = 1 - 2i3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$$

On multiplie ensuite par i :

$$i(1 - 3i)^2 = -8i - 6i^2 = 6 - 8i.$$