

Quelques rappels d'intégration

Changement de variables Pour calculer une intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, on peut poser $x = h(u)$ de telle sorte à obtenir une intégrale plus facile à calculer. On a

$$\int_a^b f(h(u))h'(u)du = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx.$$

Cela vient de $(g \circ h)'(u) = g'(h(u))h'(u)$ (dérivation de fonctions composées).

Dans la pratique, on peut écrire plus simplement : $u = \dots; du = \dots$, quand on fait le changement de variable.

Exemple dans le cours :

On souhaite calculer :

$$\frac{1}{25} \int_0^{25} \varphi(3t + 5)dt.$$

Ici, on pose $g(t) = 3t + 5$: on aura $u = g(t)$. On aura $g'(t) = 3$. On peut écrire (par abus de notation) $du = 3dt$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} \int_0^{25} \varphi(3t + 5)dt &= \frac{1}{25} \int_0^{25} \varphi(g(t))dt \\ &= \frac{1}{25} \int_5^{80} \varphi(u) \frac{du}{3}. \end{aligned}$$

Ici, on fait bien attention à **calculer les bornes** de l'intégrale $g(0) = 5$ et $g(25) = 80$. Cette nouvelle intégrale est l'intégrale de $\varphi(u)$ contre quelque chose, ce que l'on cherchait.

Exercice 1 *Changements de variables*

- $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$
- $\int_1^e \frac{1}{2t \ln(t)+t}dt$, en posant $x = \ln(t)$.

Correction disponible au lien suivant : <https://www.bibmath.net/ressources/justeunexo.php?id=393>

Intégration par parties (dite IPP) Pour calculer certaines intégrales, on reconnaît une forme de type :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Par exemple,

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} t dt$$

(quand x va vers l'infini, c'est l'espérance de la loi de Poisson).

On sait que $(u \times v)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$, et on se sert du fait que : $u'(t)v(t) = (u \times v)'(t) - u(t)v'(t)$.

La formule d'intégration par parties est :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

L'intérêt est de simplifier le calculer, parce que $u(t)v'(t)$ serait plus facile à calculer.

Exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^x \underbrace{\lambda e^{-\lambda t}}_{u'(t)} \underbrace{t}_{v(t)} dt &= [-e^{-\lambda t} \times t]_0^x - \int_0^x \underbrace{-e^{-\lambda t}}_{u(t)} \times \underbrace{1}_{v'(t)} dt \\ &= -e^{-\lambda x} x - (-e^{-\lambda 0} 0) + \int_0^x e^{-\lambda t} dt \\ &= -e^{-\lambda x} x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x \\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Remarque :

Souvent, on s'en sert quand on a un polynôme ou une fonction exponentielle! Le calcul de la dérivée ou de la primitive de $\exp(at)$ est simple, de même que celui d'un polynôme.

Quelques fois, on "triche" en faisant apparaître un 1 :

$$\int_1^5 \ln(t) dt = \int_1^5 \ln(t) \times 1 dt$$

On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$ (*je veux dériver $\ln$ que je ne sais pas manipuler*). On peut donc poser $u(t) = t$ (*n'importe quelle primitive convient, mais je prends la plus simple*), et on a $v'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} \int_1^5 \ln(t) dt &= \int_1^5 \ln(t) \times 1 dt \\ &= [\ln(t)t]_1^5 - \int_1^5 \frac{1}{t} \times t dt \\ &= 5 \ln(5) - 0 - \int_1^5 1 dt = 5 \ln(5) - 4. \end{aligned}$$

Ce n'est pas une erreur, $x \ln(x) - x$ est bien une primitive de $\ln(x)$. (Ici, on a 1 en décalage de constante avec le choix des bornes de l'intégrale).

Exercice 2

1.

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$$

2.

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Solution 2

1.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \ln(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{8 \ln(2)}{3} - \int_1^2 \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^2 \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{7}{9}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= [2\sqrt{x} \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx \\ &= 2 \ln(2) \sqrt{2} - [4\sqrt{x}]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4\end{aligned}$$