

Fonctions : vocabulaire

Une fonction f associe à chaque élément de son ensemble de définition X un élément y de son ensemble d'arrivée Y .

On note $y = f(x)$
image de x par f antécédent de y par f .

Pour $x \in X$ il n'y a qu'une seule image
En revanche y peut avoir plusieurs antécédents

Tous les éléments de Y ont-ils un antécédent ?
Si oui on parle de fonction surjective

$x \mapsto \cos x$ n'est pas surjective.
 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Mais

$x \mapsto \cos x$ l'est
 $\mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$

(Pas $x \mapsto \cos x$
 $[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$)

① Deux x différents ont-ils une image différente ?

On dit que $f: X \rightarrow Y$ est injective
 $x \mapsto f(x)$

Si $\forall (x, x') \in X^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

En général, on utilise la caractérisation (équivalente)

$\forall (x, x') \in X^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Exemples

$x \mapsto x^3$ est injective

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ non

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ oui

$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

Une fonction à la fois injective et surjective est dite bijjective

Exemples :

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Surjectivité

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

ie

$$\begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = a \\ (x-y) + (x+y) = b+a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y = a \\ 2x = b+a \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = a \\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

$$y = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

f est surjective

Injectivité

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+y = x'+y' \\ x-y = x'-y' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-x') + (y-y') = 0 \\ (x-x') - (y-y') = 0 \end{cases} \iff f\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après le calcul précédent (avec $a=b=0$)
 $(x-x') = \frac{0+0}{2} = 0$
 $(y-y') = \frac{0-0}{2} = 0$ ie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \square$

Fonctions numériques, dérivée intégrale

1) Dérivée

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou d'un intervalle ouvert contenant x_0 ouvert)

est dite dérivable en x_0 si

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ a une limite quand } h \rightarrow 0$$

On note $f'(x_0)$ cette limite.

Écriture alternative

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h) \quad \left(\frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \right)$$

Généralisation

On va supposer que f est régulière

Lien dérivée-intégrale

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t) dt$$

$$f(x_0+h) - (f(x_0) + h f'(x_0)) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - h f'(x_0)$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f'(x_0)) dt$$

6a

$$f'(t) - f'(x_0) = \int_{x_0}^t f''(s) ds$$

$$f(x_0+h) - (f(x_0) + h f'(x_0))$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t f''(s) ds dt$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t 1 ds dt = ?$$

$$\left[F(s) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \left[s \right]_{x_0}^t dt = \int_{x_0}^{x_0+h} (t - x_0) dt$$

$$= \left[\frac{(t - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_0+h} = \frac{h^2}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & f(x_0+h) - \left(f(x_0) + h f'(x_0) \right) \\
 &= \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t \left(f''(s) - f''(x_0) \right) ds dt \\
 &\quad + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t f''(x_0) ds dt}_{\frac{h^2}{2} f''(x_0)}
 \end{aligned}$$

$$f(x_0+h) - \left(f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) \right)$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t \left(f''(s) - f''(x_0) \right) ds dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t \int_{x_0}^s f^{(3)}(u) du ds dt = R$$

Si on a $|f^{(3)}| \leq K$

$$|R| \leq K \frac{|h|^3}{6} = o(h^2)$$

Calcul $\int_{x_0}^{x_0+h} \int_{x_0}^t \int_{x_0}^s du ds dt = \frac{h^3}{6}$

Exercice :

Montrer en utilisant le développement
à l'ordre 2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + o(h^2)$$