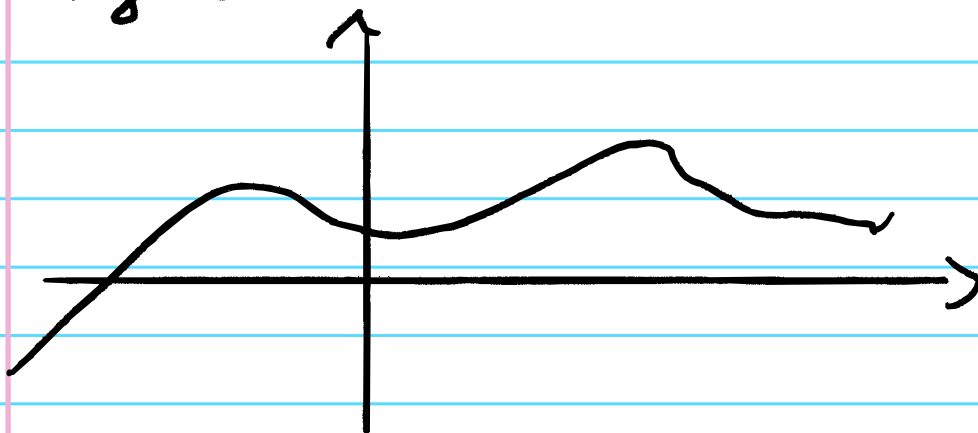


Fonctions et intégrations

I) Intégration d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
régulière



On connaît la dérivation
 $f \rightarrow f'$

A-t-on une opération inverse ?

NB: On aura forcément plusieurs solutions
car $\text{constante}' = 0$

(la dérivation n'est pas injective)

Def

On dit que F est une primitive
de f si $F' = f$

Exemple: $\Rightarrow 1 \leftarrow x$ (ou $x + C$)
 $x \leftarrow \frac{x^2}{2}$ ($\frac{x^2}{2} + C$)
 $x^n \leftarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$)

$$\frac{1}{x} \leftarrow \ln x$$

$$e^{dx} \leftarrow \frac{e^{dx}}{d}$$

Si $d \neq 0$
même complexe

$$\cos \leftarrow \sin$$

$$\sin \leftarrow -\cos$$

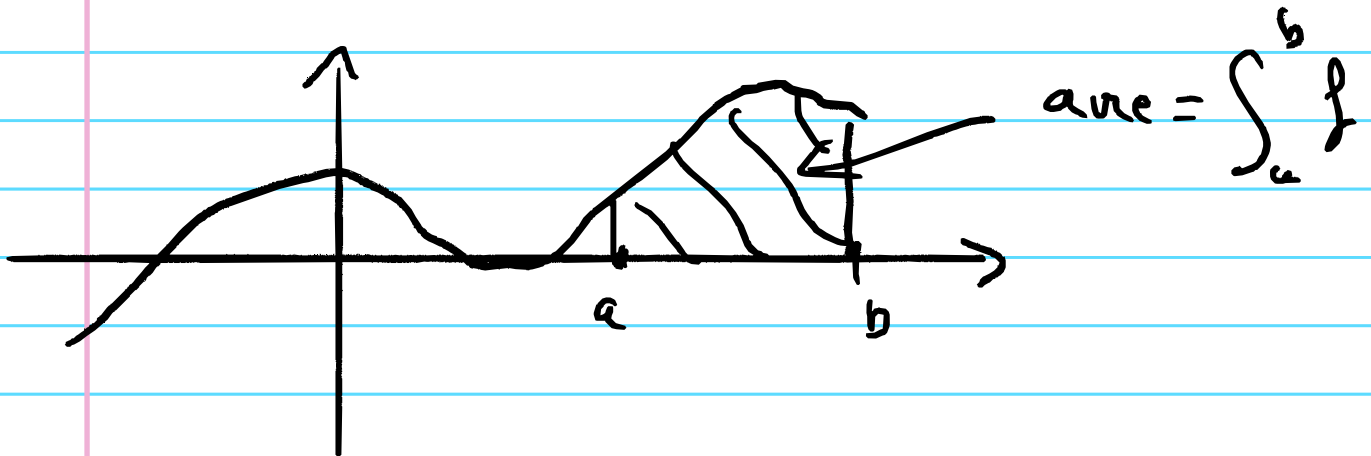
Fixer la constante revient à choisir
la valeur en un point.

On note $\int_a^x f(t) dt$ la primitive
de f nulle en a pour un $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Interprétation géométrique d'une sous la courbe

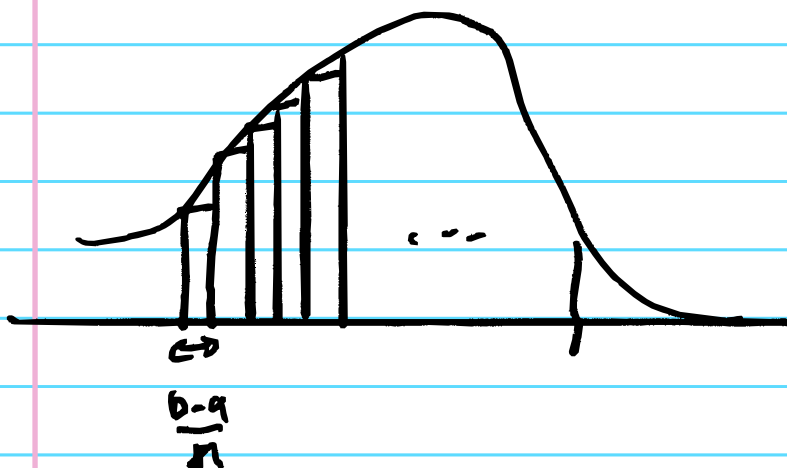
Pour une fonction f régulière de a à b

$\int_a^b f(t) dt$ est 'l'aire sous la courbe'



Aire avec un signe, on capte les parties négatives avec un signe $\ominus$

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)}_{\text{hauteur}} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{largeur}}$$



$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ pour}$$

toute primitive de f

Notation $[F]_a^b$

II Des intégrales partielles

En proba

Loi continue :

$$Z \sim \mathcal{Z}(1) \quad P(Z > a) = e^{-a} \quad a > 0$$

loi sur $\mathbb{R}^+$

$$P(Z \in [a, b]) = \int_a^b \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \text{densité}} dx$$

$$e^{-x} dx \approx P(Z \in [x, x+dx])$$

Loi discrètes $\rightarrow$ somme
continues $\rightarrow$ intégrale

$$E_{\mathcal{Z}(1)}(Z) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Comment le calculer ça ?

Aparté: intégration par parties

Souvent on ne connaît pas $\int f$
Il est parfois utile d'utiliser la remarque

Dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

NB l'intégration est linéaire et $\int$.

$$\text{On } \int_a^b (uv)' = (uv)(b) - (uv)(a) = [uv]_a^b$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

Principe: Reconnaître $f = u'v$

Et $\int uv'$ est calculable.

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Application: $\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$

$$u' = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow u = -e^{-\lambda x}$$

$$v = x \longrightarrow v' = 1$$

$$\left[u v \right]_0^{\infty} = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -1 \cdot e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

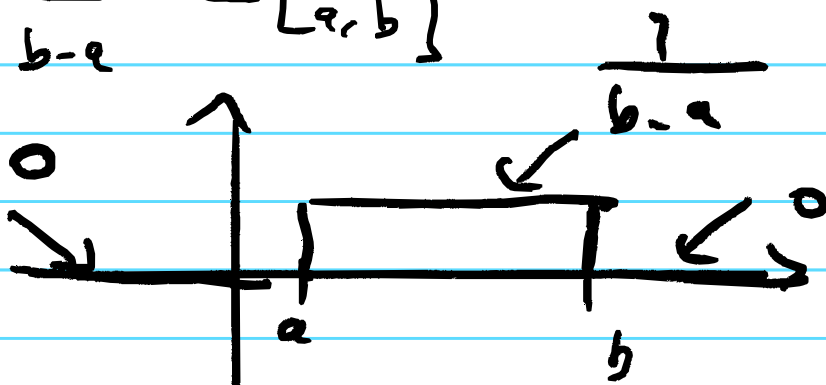
$$\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Exercise: $I_n(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} dx$

Mq $I_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}$

Loi uniforme sur $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a, b]}$$



Loi gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Justification des constantes :

Aparté: Changer et de variable

Il peut parfois être intéressant de changer de point de vue et de voir la fonction avec une autre variable (ln, exp, x^2 ...)



Si on change de variables, la densité change.

Raison profonde : le dx est effectif

Version primitive:

$$F(\varphi(x)) \cancel{\varphi(x)} \rightarrow F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Version dx :

$$F(\varphi(x+dx)) - F(\varphi(x))$$

$$\approx F(\varphi(x) + \varphi'(x)dx + \dots) - F(\varphi(x))$$

$$\approx \cancel{F(\varphi(x))} + F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx - \cancel{F(\varphi(x))}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

En pratique, souvent on pose

$$y = \varphi(x)$$

$$x = \varphi^{-1}(y)$$

$$dx = \varphi^{-1}'(y)$$

Version 2D

Calculons

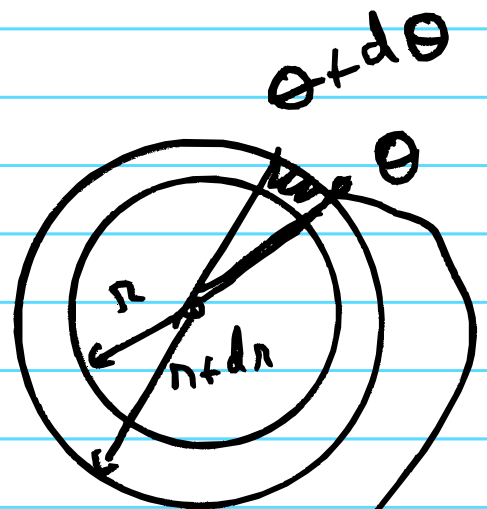
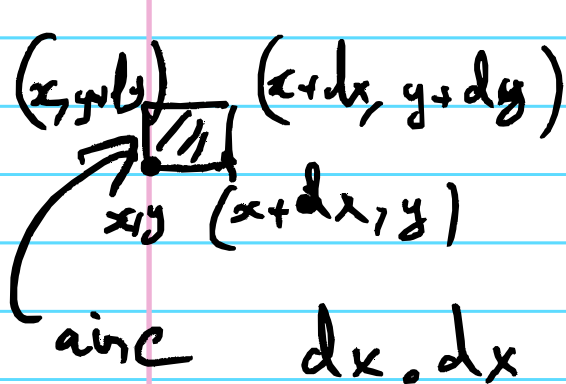
$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

Changement en polaire

$$I^2 = \sum_{\text{carré rectangles}} dx dy$$

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Mais les éléments de surfaces changent



$$\text{Aire} = \frac{d\theta}{2\pi} \cdot (\pi(r+dr)^2 - \pi r^2)$$

$\sim d\theta \cdot r dr$

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr}_{\substack{\swarrow \\ 2\pi}} \quad \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} = 1
 \end{aligned}$$

$$I^2 = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi}$$

Les complexes:

$$e^{3x} \leftarrow \frac{e^{3x}}{3} \quad \text{si } 3 \neq 0$$

NB exemple en trigo

$$\cos x = \operatorname{Re} (e^{ix}) \leftarrow \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{i} \right) = \sin x$$

$$\sin x = \operatorname{Im} (e^{ix}) \leftarrow \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{i} \right) = -\cos x$$

