Intégration par parties

Si vous ne connaissez pas la fonction Arctan, sa propriété essentielle ici est $Arctan'(x) = 1/(1+x^2)$

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \mathrm{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

https://www.youtube.com/watch?v=15IrPAzKwzc

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Indications 2. 1. Pour $\int x^2 \ln x \, dx$ poser $v' = x^2$, $u = \ln x$.

2. Pour $\int x \arctan x \, dx$ poser $v' = x$ et $u = \arctan x$.
3. Pour les deux il faut faire une intégration par parties avec $v' = 1$.
4. Pour $\int \cos x \exp x \, dx$ il faut faire deux intégrations par parties.

Correction 2. 1. $\int x^2 \ln x \, dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \ln x \times x^2 \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} \, dx \\ &= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c\end{aligned}$$

2. $\int x \arctan x \, dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \arctan x$ et $v' = x$. On a donc $u' = \frac{1}{1+x^2}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \arctan x \times x \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{1}{2} x + c\end{aligned}$$

3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$

Pour la primitive $\int \ln x \, dx$, regardons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = 1$. Donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x \, dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Par la primitive $\int (\ln x)^2 \, dx$ soit l'intégration par parties définie par $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$. Donc $u' = 2\frac{1}{x} \ln x$ et $v = x$.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 \, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[x(\ln x)^2\right] - 2 \int \ln x \, dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

4. Notons $I = \int \cos x \exp x \, dx$.
Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \cos x$. Alors $u' = \exp x$ et $v = \sin x$. Donc

$$I = \int \cos x \exp x \, dx = \big[\sin x \exp x\big] - \int \sin x \exp x \, dx$$

Si l'on note $J = \int \sin x \exp x \, dx$, alors on a obtenu

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J \tag{1}$$

Pour calculer J on refait une deuxième intégration par parties avec $u = \exp x$ et $v' = \sin x$. Ce qui donne

$$J = \int \sin x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = \big[-\cos x \exp x\big] + I \tag{2}$$

Repartons de l'équation (1) dans laquelle on remplace J par la formule obtenue dans l'équation (2).

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J = \big[\sin x \exp x\big] - \big[-\cos x \exp x\big] - I$$

D'où

$$2I = \big[\sin x \exp x\big] + \big[\cos x \exp x\big]$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \exp x + c.$$