Systèmes multi-agents
CM°2. Théorie du choix social

Maxime Morge <Maxime.Morge@univ-lyon1.fr>

Polytech Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1

2025-2026

Résumé de l'épisode précédent

POLYTECH LYON

Système complexe

Un **système complexe** est un ensemble d'entités en interaction locale dont le comportement global ne peut pas être modélisé par des équations prédictives et solvables.

Systèmes Multi-Agents (SMA)

Un **SMA** est composé de multiples entités autonomes, appelées **agents**, en **interaction**, situés dans un **environnement** qui prennent part à une **organisation**.

NetLogo

Un langage de programmation et un environnement de développement (IDE) pour la conception de simulations multi-agents.

Plan

POLYTECH LYON

Qu'est-ce qu'un choix ?

Prise de décision

La **prise de décision** est un processus cognitif menant à la sélection d'un plan d'action parmi un ensemble d'alternatives fondée sur leur valeur.

Choix

Un **choix** est un processus mental de jugement des mérites de multiple options et de sélection de l'une d'elles pour l'action.

Choix

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'alternatives. Une **fonction de choix** pour $\mathcal{A}$ est une fonction $\mathsf{C} : 2^{\mathcal{A}} \to 2^{\mathcal{A}}$ définie telle que pour tous $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$:

1. $\mathsf{C}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$, et
2. si $\mathcal{B} \neq \emptyset$, alors $\mathsf{C}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

Qu'est-ce qu'un choix rationnel ?

Choix rationnel

Une **fonction de choix** pour un ensemble d'alternatives $\mathcal{A}$ est :

- α-rationnelle, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ alors $(\mathcal{B} \cap \mathsf{C}(\mathcal{A})) \subseteq \mathsf{C}(\mathcal{B})$
- β-rationnelle, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ et $x, y \in \mathsf{C}(\mathcal{B})$ alors $(x \in \mathsf{C}(\mathcal{A})$ ssi $y \in \mathsf{C}(\mathcal{A}))$
- γ-rationnelle $\cap_i \mathsf{C}(B_i) \subseteq \mathsf{C}(\cup_i B_i)$ quel que soit $B_i \subseteq \mathcal{A}$

Quelles sont les alternatives ?

Alternative

Soit $(Att_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille indexée d'ensembles non vides appelés **attributs**.

- Un **concept** est un produit Cartésien $C = \Pi_{i=1}^{n} Att_i$
- Une **instance** $o \in C$ est un tuple $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ où $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ v_i \in Att_i$
- Une **alternative** est un objet $a \in \mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} \subseteq C$

- Une décision est **multi-critère** si $n \geq 2$, **mono-critère** sinon.

Préférences cardinales

POLYTECH LYON

Fonction d'utilité

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble non vide d'alternatives. Une **fonction d'utilité**, notée $u : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ attribue un gain pour chaque alternative.

Fonction d'utilité multi-attributs

La fonction d'utilité multi-attributs est la somme pondérée des fonctions d'utilité sur chaque attribut

$$u(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \Sigma_{i=1}^{n} w_i u_i(v_k) \quad (1)$$

où $u_i : Att_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction d'utilité pour l'attribut Att_i et w_i le poids de cet attribut.

Préférences ordinales

POLYTECH LYON

« L'alternative x est au moins aussi bonne que y » ($x \succsim y$)

Soit $(\succsim, \mathcal{A})$ un préordre (binaire, réflexif, transitif).

- La **relation de préférence stricte**, notée $\succ$, vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, x \succ y \Leftrightarrow (x \succsim y \wedge \neg (y \succsim x)) \quad (2)$$

  $x \succ y$ se lit *x est strictement préféré à y*
- la **relation d'équivalence**, notée $\sim$, vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, x \sim y \Leftrightarrow (x \succsim y \wedge y \succsim x) \quad (3)$$

  $x \sim y$ se lit *x est équivalent à y*
- la **relation d'incomparabilité**, notée $\bowtie$, vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, x \bowtie y \Leftrightarrow (\neg (x \succsim y) \wedge \neg (y \succsim x)) \quad (4)$$

  $x \bowtie y$ se lit *x et y sont incomparables*

Choix ordinal

POLYTECH LYON

Choix

Soit $(\mathcal{A}, \succsim)$ un ensemble d'alternatives associé à une relation de préférence.

- La **fonction de choix optimal** est définie telle que :

$$C_O(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \forall y \in \mathcal{A},\ x \succsim y\} \quad (5)$$

  La **fonction de choix non-dominé** est définie telle que :

$$C_{ND}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid \forall y \in \mathcal{A},\ \neg (y \succ x)\} \quad (6)$$

- Il existe toujours au moins une alternative non dominée. Une alternative optimale peut ne pas exister.
- Toute alternative optimale est également non dominée. L'inverse n'est pas vrai.

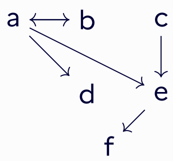
Graphe de préférence

Graphe de préférence

Soit $(\mathcal{A}, \succsim)$ un ensemble non vide d'alternatives muni d'une relation de préférence, on appelle **graphe de préférence** le graphe orienté $G = (\mathcal{A}, V)$ such that :

$$V = \{(x, y) \in \mathcal{A}^2 \mid x \neq y, x \succsim y, \nexists z \in \mathcal{A} \setminus \{x, y\}, x \succsim z \wedge z \succsim y\} \qquad (7)$$

$x \succsim y$ s'il existe un chemin depuis x vers y.
$\{$**a**llemagne,**b**elgique,**c**roatie,**d**anemark,**e**spagne,**f**rance$\}$



Un graphe de préférence avec 10 attributs et 10 valeurs pour chaque attribut a 10 milliards de nœuds.

Préférences cardinales vs. préférences ordinales

Remarques

- Les relations de préférence capturent des préférences qualitatives tandis que les fonctions d'utilité capturent des préférences quantitatives.
- Les préférences cardinales subsument les préférences ordinales.
- L'utilité fait référence à l'évaluation intrinsèque des alternatives plutôt qu'à leur évaluation comparative.
- La représentation numérique de l'utilité conduit à de nombreux opérateurs d'agrégation mathématiques qui peuvent être mal interprétés dans une perspective comparative.

Fonction de choix social

Fonction de choix social

Soit Ω un ensemble d'agents, $\mathcal{A}$ un ensemble d'alternatives et $(\mathcal{P})_{i \in \Omega}$ les préférences individuelles des agents sur $\mathcal{A}$, i.e. des ordres partiels (réflexifs, transitifs et antisymétriques). La **fonction de choix social** $\mathcal{P}^*$ sur $\mathcal{A}$ vérifie que :

1. $\mathcal{P}^*$ existe quelque soient les préférences individuelles
2. $\mathcal{P}^*$ est une relation d'ordre partielle
3. la **règle d'unanimité**
   $$\text{Si } \forall x, y \in \mathcal{A}\ \forall i \in \Omega\ x\mathcal{P}_i y, \text{ alors } x\mathcal{P}^* y$$
4. la **règle d'indépendance** vis-à-vis des alternatives non pertinentes, i.e.
   $$\text{Si } \forall x, y \in \mathcal{A}\ x\mathcal{P}_i y \Leftrightarrow x\mathcal{P}'_i y, \text{ alors } \mathcal{P}'^* \Leftrightarrow \mathcal{P}^*$$
5. la **règle de non-dictacture**
   $$\nexists i \in \Omega,\ x\mathcal{P}_i y \Rightarrow x\mathcal{P}^* y$$

Fonction de choix social

Théorème d'Arrow

Quand les agents disposent de trois alternatives ou plus il n'existe pas de fonction de choix social.

Considérons une élection avec les alternatives a, b, c et d telle que :

- pour 35% des votants $c\mathcal{P}d\mathcal{P}b\mathcal{P}a$;
- pour 33% des votants $a\mathcal{P}c\mathcal{P}d\mathcal{P}b$;
- pour 32% des votants $b\mathcal{P}a\mathcal{P}c\mathcal{P}d$.

Quels sont les vainqueurs si on considère les procédures suivantes :

1. « b contre d », alors le vainqueurs contre a, puis le vainqueur contre b ?
2. « c contre a », puis le vainqueur contre d, puis le vainqueur contre b ?
3. « a contre b », alors le vainqueur contre c, puis le vainqueur contre d ?
4. « c contre a », alors le vainqueur contre b, puis le vainqueur contre d ?

Théorie des jeux

Jeu stratégique

Un **jeu stratégique** est un modèle de situation où chaque joueur choisit son plan une fois pour toute et où toutes les décisions des joueurs sont simultanées.

Jeu sous forme extensive

Un **jeu sous forme extensive** est un modèle de situation, qui précise l'ordre des événements, où chaque joueur choisi son plan d'action pas seulement au début du jeu mais à chaque fois qu'il doit prendre une décision.

Jeu stratégique

Jeu stratégique

Un **jeu stratégique** est un triplet $\langle \Omega, (\mathcal{A}_i)_{i\in\Omega}, (\mathcal{P}_i)_{i\in\Omega} \rangle$ où :

- $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ est un ensemble fini de n **joueurs**
- $\mathcal{A}_i$ est un ensemble non vide d'**actions** disponibles pour chaque joueur $i \in \Omega$
- $\mathcal{P}_i$ est la relation de préférence sur $\mathcal{A} = \times_{i\in\Omega} \mathcal{A}_i$ du joueur $i \in \Omega$

- Chaque joueur i choisit une action (stratégie)
- Ces choix sont simultanés
- Le résultat est un profil $\mathcal{A} = (x_i, x_{-i})$ avec $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n) \in \times_{j\neq i} \mathcal{A}_j$

Matrice des gains

Le dilemme des prisonniers
(coopérer ou dénoncer)

Prisonnier A \ Prisonnier B	C	D
C	$(-2,-2)$	$(-10,0)$
D	$(0,-10)$	$(-5,-5)$

La bataille des sexes
(foot ou ballet)

Homme \ Femme	F	B
F	$(3,2)$	$(1,1)$
B	$(0,0)$	$(2,3)$

Équilibre en stratégie dominante

Une stratégie est **dominante** pour un joueur quand il n'y a pas d'autre stratégie dont le gain est toujours strictement supérieur, indépendamment des stratégies choisies par les autres joueurs.

Stratégie dominante

Soit $\langle \Omega, (\mathcal{A}_i)_{i\in\Omega}, (\mathcal{P}_i)_{i\in\Omega}\rangle$ un jeu stratégique. La stratégie $\hat{x}_i$ du joueur i est dominante ssi :

$$\forall (x_i, x_{-i}) \in (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{-i}), (\hat{x}_i, x_{-i})\mathcal{P}_i(x_i, x_{-i}) \tag{8}$$

Un équilibre en stratégie dominante est une situation (qui n'existe pas toujours) où tous les joueurs ont une stratégie dominante.

Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash est une situation (qui n'existe pas toujours) dans laquelle aucun joueur, qui connaît les stratégies des autres agents, n'a intérêt à dévier unilatéralement.

Équilibre de Nash

Soit $\langle \Omega, (\mathcal{A}_i)_{i\in\Omega}, (\mathcal{P}_i)_{i\in\Omega}\rangle$ un jeu stratégique. Le profil $\dot{\mathcal{A}} = (\dot{x}_i, \dot{x}_{-i})$ est un équilibre de Nash ssi :

$$\forall i \in \Omega, \ \forall x_i \in \mathcal{A}_i, \ (\dot{x}_i, \dot{x}_{-i})\mathcal{P}_i(x_i, \dot{x}_{-i}) \tag{9}$$

Optimum de Pareto

L'optimimum de Pareto correspond aux situations (il en existe toujours une) où les deux joueurs n'ont aucun intérêt collectivement à changer.

Optimum de Pareto

Soit $\langle \Omega, (\mathcal{A}_i)_{i\in\Omega}, (\mathcal{P}_i)_{i\in\Omega} \rangle$ un jeu stratégique. Un profil $\mathcal{A}$ est **Pareto dominé** par un autre profil d'action $\mathcal{B}$ ssi :

1. $\forall i \in \Omega,\ \mathcal{B}\mathcal{P}_i\mathcal{A}$
2. $\exists i \in \Omega,\ \mathcal{B} \succ_i \mathcal{A}$

Un profil est un **optimum de Pareto** ssi il n'est pas Pareto dominé par un autre profil.
La **frontière de Pareto** pour Ω sur $\mathcal{A}$ est l'ensemble des optimum de Pareto.

Bien-être social

Fonction de bien-être social

Soit $\langle \Omega, (\mathcal{A}_i)_{i\in\Omega}, (u_i)_{i\in\Omega} \rangle$ un jeu stratégique.

- Le **bien-être utilitaire** évalue le bien-être de la société :

$$sw_u(\mathcal{A}) = \sum_{i\in\Omega} u_i(\mathcal{A}) \tag{10}$$

- Le **bien-être égalitaire** évalue le bien-être du moins bien lôti :

$$sw_e(\mathcal{A}) = \min_{i\in\Omega} u_i(\mathcal{A}) \tag{11}$$

- Le **bien-être de Nash** évalue le produit des utilités :

$$sw_n(\mathcal{A}) = \Pi_{i\in\Omega} u_i(\mathcal{A}) \tag{12}$$

Exemple d'équilibres et d'optimum

Le dilemme des prisonniers
(coopérer ou dénoncer)

Prisonnier A \ Prisonnier B	C	D
C	$(-2,-2)$	$(-10,0)$
D	$(0,-10)$	$(-5,-5)$

- Équilibre en stratégie dominante :
- Équilibre de Nash :
- Pareto optimum :
- Optimum utilitaire :

La bataille des sexes
(foot ou opéra)

Homme \ Femme	F	B
F	$(3,2)$	$(1,1)$
B	$(0,0)$	$(2,3)$

- Équilibre en stratégie dominante :
- Équilibre de Nash :
- Pareto optimum :
- Optimum utilitaire :

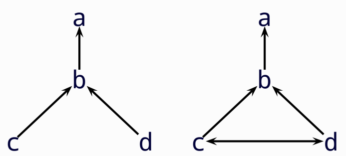
Cadre d'argumentation abstrait [Dung, 1995]

AAF

Un **cadre d'argumentation abstrait** est un couple AAF $= \langle \mathcal{A}rg, \texttt{attacks} \rangle$ où $\mathcal{A}rg$ est un ensemble fini d'arguments et $\texttt{attacks} \subseteq \mathcal{A}rg \times \mathcal{A}rg$ une relation binaire sur $\mathcal{A}rg$.

Quand $(a, b) \in \texttt{attacks}$, on dit que a attaque b.

AAF_1 AAF_2



- a : si pas de randonnée alors musée
- b s'il fait beau alors randonnée
- c : canicule
- d :
  - pluie (AAF_1)
  - froid (AAF_2)

Quels sont les arguments justifiés / rejetés / indécis ?

Calcul des oppositions

Acceptabilité

Un argument a est **acceptable** vis-à-vis de S (dénoté $\texttt{acc}(a, S)$) ssi S attaque tous les attaquants de a (a fortiori si a n'est pas attaqué).

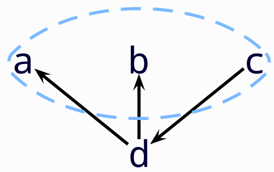
$$a \leftarrow b \leftarrow c$$

a est réinstancié car c défend a

Sémantique

Admissibilité

- S est **libre de conflit** ssi $\forall a, b \in S$ ce n'est pas le cas que a attaque b.
- S est **admissible** (dénoté $\texttt{adm}(S)$) ssi S est libre de conflit et S attaque tous les arguments a tels que a attaque des arguments dans S.



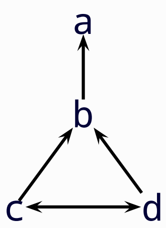
Lemme

Si un ensemble d'arguments S est admissible et défend 2 arguments a et b, alors $S \cup \{a\}$ est admissible et il défend b.

Sémantique déclarative

Extensions

- S est **préféré** (dénoté $\texttt{pref}(S)$) ssi S est maximalement admissible (vis-à-vis $\subseteq$) ;
- S est **complet** (dénoté $\texttt{comp}(S)$) ssi S est admissible et S contient tous les arguments a tels que S attaques toutes les attaques contre a ;
- S est **fondé** (dénoté $\texttt{gnd}(S)$) ssi S est minimalement complet (vis-à-vis de $\subseteq$).

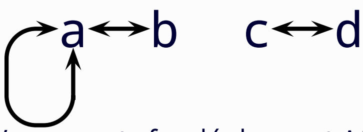


- $\texttt{adm}(S)$ iff $S =$
- $\texttt{pref}(S)$ iff $S =$
- $\texttt{comp}(S)$ iff $S =$
- $\texttt{gnd}(S)$ iff $S =$

Sémantique déclarative (suite)

Autres extensions

- S est **stable** (dénoté $\texttt{stable}(S)$) ssi tous les arguments qui ne sont pas dans S sont attaqués par S
- S est **idéal** ssi S est admissible et il est contenu dans tous les ensembles préférés.

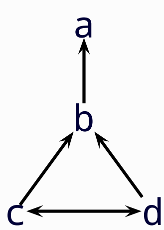


1. Existe-t-il un ensemble d'arguments fondé dans cet AAF ? Si c'est le cas, lequel ?
2. Quelle(s) est/sont les extension(s) préférée(s) de ce cadre ?
3. Quel est l'ensemble idéal maximal des arguments ?

Justification collective

Crédulité/Scepticisme

- a est crédiblement justifié dans la sémantique E si a est dans au moins une extension E.
- a est sceptiquement justifié dans la sémantique E si a est dans toutes les extensions E.



- a est sceptiquement préféré
- c et d sont crédiblement préférés

Relations entre extensions

Propriétés

- Tout ensemble admissible est inclus dans une extension préférée.
- Chaque AAF a au moins une extension préférée.
- Chaque extension préférée est une extension complète, mais pas l'inverse.
- Une extension préférée est une extension complète maximale.
- L'extension fondé est la plus petite extension complète.

L'extension fondée est la sémantique la plus sceptique qui ne coïncide pas nécessairement avec l'intersection de toutes les extensions préférées.

Jeu d'argumentation

- L'argumentation est un processus, i.e. un dialogue
- Des règles procédurales (protocole) régissent les échanges d'arguments et de contre-arguments
- L'argumentation est un jeu qui se gagne lorsqu'une thèse se défend contre une thèse adverse
- Un validateur pour persuader un falsificateur qui tente de forcer le validateur à se retirer

Sémantique déclarative

Correction Complétude

Procédure de preuve dialectique

Enquête dialectique [Vreeswik et Prakken, 2000]

TPI-dispute (*Two-Party Immediate Respond dispute*)

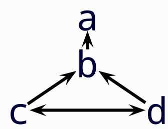
Un **différend à deux parties à réponse immédiate** est un jeu d'argumentation entre Pro et Opp tel que :

- les deux parties sont autorisées à répéter Pro ;
- Pro n'est pas autorisé à répéter Opp ;
- Opp est autorisé à répéter Opp dans une autre ligne de litige (*backtracking*).

Théorème (correction/complétude)

- Un argument est crédible s'il peut être prouvé dans toutes les TPI.
- Un argument est préféré de manière sceptique s'il est préféré de manière crédible et si tous ses attaquants ne sont pas prouvés dans toutes les TPI.

Enquête dialectique : exemple



1. Quelles sont les extensions préférées de ce cadre ?
2. Les TPI sur a et b ?

À emporter

Préférence cardinale

Une **fonction d'utilité** attribue un gain pour chaque alternative, $u : \mathcal{A} \to [0; 1]$

Préférence ordinale

Une relation de préférence est un préordre (binaire, réflexif, transitif), $(\succsim, \mathcal{A})$.

Théorème d'Arrow

Quand les agents disposent de 3 alternatives ou plus il n'existe pas de fonction de choix social.

Dilemme des prisonniers

2 agents, agissant dans leur propre intérêt, aboutissent à un résultat sous-optimal.

Cadre d'argumentation abstrait

Un ensemble d'arguments muni d'une relation d'attaque.

Bibliographie I

Arrow, K. J. (1951). Social Choice and Individual Values. Wiley & Sons.
Arrow, K. J. (1958). Utilities, Attitudes, Choices : A Review Note. Econometrica, 26(1), 1-23.
Boutilier, C., Brafman, R. I., Domshlak, C., Hoos, H. H., & Poole, D. (2004). CP-nets : A Tool for Representing and Reasoning with Conditional Ceteris Paribus Preference Statements. Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR), 21, 135-191.
Davis, R., & Smith, R. G. (1980, 1981-05-01). Negotiation as a Metaphor for Distributed Problem Solving (rapp. tech. N° AIM-624). Massachusetts Institute of Technology.
Dung, P. M. (1995). On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. Artificial Intelligence, 77(2), 321-357. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0004-3702(94)00041-X
Keeney & Raiffa, H. (1976). Decisions with Multiple Objectives. John Wiley New York.
Moulin, H. J. (2002). Fair Division and Collective Welfare. The MIT Press.
Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). A Course in Game Theory. MIT Press.
Rahwan, I., & Simari, G. R. (2009). Argumentation in Artificial Intelligence. Springer.

Bibliographie II

Rawls, J. (1971). A Theory of Justice. Harvard University Press.
Sen, A. K. (1970). Collective Choice and Social Welfare. North-Holland.
Vreeswik, G. A., & Prakken, H. (2000).Credulous and sceptical argument games for preferred semantics. European workshop on logics in artificial intelligence, 239-253.