Introduction aux complexes

I Ensemble de nombres classiques

Le premier ensemble de nombres qu'on manipule est l'ensemble des <u>entiers naturels</u> noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

c'est un ensemble infini de nombre stable par addition (la somme reste dans $\mathbb{N}$) et par multiplication (le produit reste dans $\mathbb{N}$).

Pour obtenir un ensemble stable par soustraction il faut étendre aux entiers négatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

ensemble des entiers.

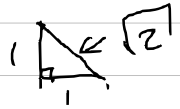
On a ensuite les nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

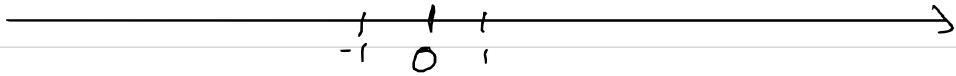
(2)

On peut toujours comparer deux rationnels mais il reste des trous.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel et pourtant on peut le représenter géométriquement



En "comblant les trous" on construit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, représenté par une droite



Pourquoi faire plus gros ?

Introduction de i

<u>Définition</u> : on définit i comme une racine de -1.

$$i^2 = (-i)^2 = -1$$

A partir de là on peut créer les nombres <u>imaginaires purs</u>

$$i\mathbb{R} = \{ i \cdot r \ , \ r \in \mathbb{R} \}$$

$$(ir)^2 = -r^2$$

On peut ensuite les combiner avec des nombres réels.

Un nombre complexe est défini comme la somme d'un réel et d'un imaginaire pur.

$$z = a + ib \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

a est appelé partie réelle de z $Re(z)$

b est appelé partie imaginaire de z $Im(z)$

$\mathbb{C} = \{ z = a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$ = complexes

④

Opérations élémentaires

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

$$-z = -a - ib$$

Produit : on écrit simplement

$$z \cdot z' = (a + ib)(a' + ib')$$

$$= aa' + iba' + iab' + \underbrace{i^2}_{-1} bb'$$

$$= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

(ne pas hésiter à refaire ce calcul en cas de doute)

Complexe conjugué :

On note le cas particulier

$z' = a - ib$ noté $\bar{z}$

$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (réel positif)

(5) <u>Module</u> : le module est l'extension pour les complexes de la valeur absolue

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

<u>NB</u> : $|z| = |\bar{z}|$; $|i| = 1$

$$z = 0 \iff a = b = 0 \iff \bar{z} = 0 \iff |z| = 0$$

<u>Inverse</u> : Si $z \neq 0$ (et donc $|z| \neq 0$)

On a $\dfrac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \iff \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$(a,b) \neq (0,0)$

Et on peut donc construire des quotients

$$\frac{z}{z'} \quad \text{pour } z' \neq 0$$

(diviser par 0 reste interdit)

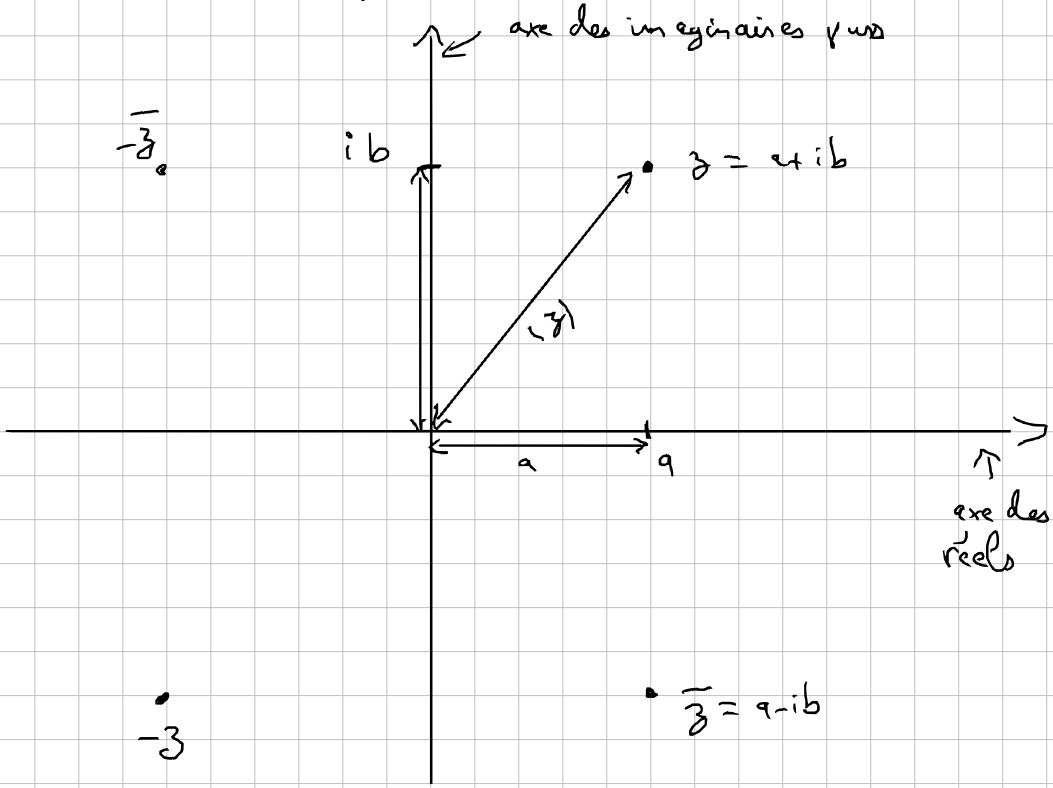
<u>Module du produit</u> :

$|zz'| = |z||z'|$ (notamment $|z^n| = |z|^n$)

Première vision géométrique

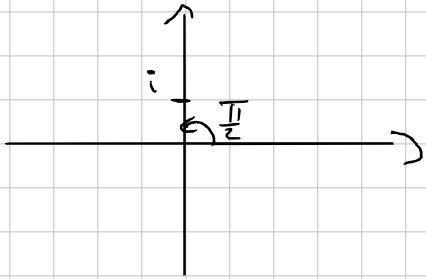
$\mathbb{R} \to$ droite

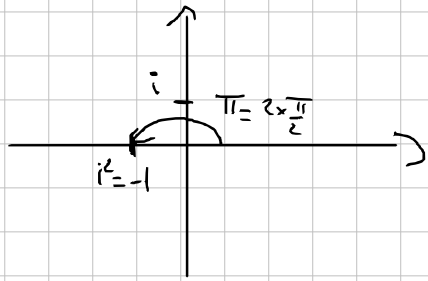
$\mathbb{C} \to$ plan

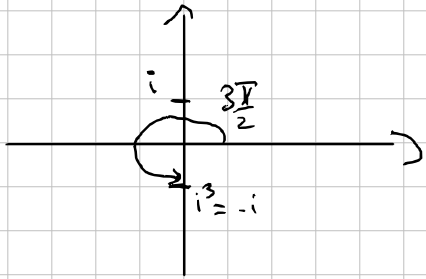


$|z|$ s'obtient comme une longueur via Pythagore

Deuxième vision géométrique







Représentation angulaire

$$z = a + ib = |z| \times (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Propriété : (exercice)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

Conséquence :

$$zz' = |z|\,|z'|\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right)$$
$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Exponentielle complexe

On note pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Propriétés (exercice)

- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Cohérence :

Pour l'exponentielle classique sur $\mathbb{R}$ on définit $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$

$$= e^a(\cos b + i\sin b)$$

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire

$$z = |z| e^{i\theta}$$

θ est appelé argument de z

(défini à 2π près, par convention choisi dans $]-\pi, \pi]$)

Propriétés

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad \left(e^{-z} = \frac{1}{e^{z}} \text{ rotée}\right)$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = 1$$

$$|e^{z}| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Propriétés algébriques

Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P(X) = \underset{\neq 0}{a_n} X^n + a_{n-1} X^{n-1} \dots + a_0$ un polynôme de degré n, alors P se factorise dans $\mathbb{C}$.

Il existe $z_1, \dots z_n$ * tels que

$$P(X) = a_n \cdot (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$$

* possiblement pas tous distincts.