Chapitre I : Intensité-Loi d'Ohm-Effet Joule

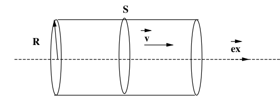
Plan

I. Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule
Puissance Joule

1. *Intensité d'un faisceau de particules*

Soit un faisceau cylindrique de particules de charge q.



Hypothèses :

- Distribution homogène des charges: densité volumique de particules $n =$ cste.
- Faisceau monocinétique $\vec{v} = v\vec{e_x}$
- Sur l'intervalle de temps $[t,t+dt]$ le nombre de particules qui traversent la section **S** est : $\Delta N = vdt \times S \times n$
  Ce qui permet de déduire la quantité de charge :

$$\Delta Q = q\Delta N = qnsvdt$$

Définition : L'intensité du faisceau est : $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnsv$ quantité de charge traversant la section **S** pendant l'unité de temps.

I. Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule
Puissance Joule

2. *Vecteur densité de courant $\vec{j}$* (ici :densité surfacique)

Définition : $\vec{j} = nq\vec{v}$ avec le module $j = \|\vec{j}\| = n|q|v$ d'où

$\boxed{I = \vec{j} \cdot S\vec{e_x}}$

Par convention le sens du courant est le sens de déplacement des charges positives.

$q > 0$ $\quad I > 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de même sens	$[I] = A$ (Ampère)
$q < 0$ $\quad I < 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de sens opposé	$[j] = Am^{-2}$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule
Puissance Joule

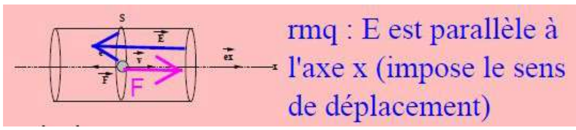
Trois hypothèses :

1. Les porteurs de charges sont les e^- libres de densité particulaire n
2. En présence de $\vec{E}$, champ électrique créé par la d.d.p. (différence de potentiel) appliquée aux bornes du conducteur, ces e^- sont animés d'une vitesse moyenne $\overrightarrow{v(t)} \Longrightarrow$ Le conducteur est le siège d'un courant caractérisé par le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j(t)} = -ne\overrightarrow{v(t)}$. $\qquad e \sim 1{,}6 \times 10^{-19} C$
3. Les collisions subies par les e^- de conduction en traversant le conducteur $\Longleftrightarrow$ à une force de frottement appliquée à chacun des e^-.

$\overrightarrow{f(t)} = -k\overrightarrow{v(t)}$ $k > 0$ (k: constante caractéristique du métal

1. *Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur*

Remarque:
$m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg soit $\|P\| = mg = 9 \times 10^{-30}$N
$\vec{F} = q\vec{E}$ soit $\|F\| = qE = 1{,}6 \times 10^{-16}$ N
$(E = \frac{ddp}{d} = \frac{220V}{22cm} = 1000V/m)$
$\vec{P} \Longrightarrow$ négligeable par rapport à $\vec{F}$.



Relation Fondamentale de la Dynamique : $m\vec{a} = \underbrace{-e\vec{E}}_{F_{elec}} \underbrace{-k\overrightarrow{v(t)}}_{F_{frottement}}$

$$\boxed{\overrightarrow{a(t)} + \frac{k}{m}\overrightarrow{v(t)} = \frac{-e}{m}\vec{E}}$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule

Équation différentielle vectorielle du mouvement d'un e^-.

$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e_x} + \frac{k}{m}\overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e_x} = \frac{-e}{m}E \Longrightarrow \boxed{\frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_x(t) = -\frac{e}{m}E \ (1)}$

$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e_y} + \frac{k}{m}\overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e_y} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{dv_y(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_y(t) = 0 \quad (2)}$

$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e_z} + \frac{k}{m}\overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e_z} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{k}{m}v_z(t) = 0 \quad (3)}$

$\Longrightarrow$ 3 équations différentielles à résoudre :
solution de (2) & (3) (maths):
avec $[\ln(f(t))]' = \frac{d\ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$ où $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ donc

$f'(t) + af(t) = 0 \rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -a \overset{\text{primitive}}{\overbrace{\rightarrow}} \ln(f(t)) = -at + \overset{\ln(f_0)}{\overbrace{cste}}$

$\ln\frac{f(t)}{f_0} = -at \overset{\text{exponentiation}}{\overbrace{\rightarrow}} f(t) = f_0 e^{-at}$

$$\boxed{v_y = A_y exp(-\frac{k}{m}t) \qquad v_z = A_z exp(-\frac{k}{m}t)}$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule

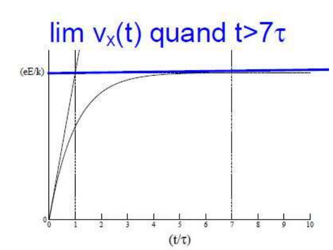
Remarque:
Avant $t = 0$ (date d'application de $\vec{E}$) toutes les directions de vitesses sont équiprobables.
$\Longrightarrow v_y = v_z = 0$. En effet il n'y a pas d'e^- qui sort d'un conducteur non soumis à une ddp.
$\Longrightarrow A_y = A_z = 0$.
Résolution de (1):

- Solution générale : $v_x = -\frac{eE}{k} + A_x exp(-\frac{k}{m}t)$
- conditions initiales :
  à $t = 0$ $v_x = v_y = v_z = 0 \Rightarrow A_x = e\frac{E}{k}$
- Solution complète :
  $v_x(t) = e\frac{E}{k}[exp(-\frac{k}{m}t) - 1]$. On pose $\tau = \frac{m}{k}$

$$\Longrightarrow \vec{v} = -\frac{e}{k}[1 - exp(-\frac{t}{\tau})]\vec{E}$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A. Lebeault
Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule



$exp(-\frac{t}{\tau}) << 1$ et $exp(-7) = 910^{-4}$ pour $t > 7\tau$. Il y a donc établissement d'une vitesse constante uniforme $\vec{v_0}$, cad d'un régime permanent. Les e^- ont un mvt rectiligne uniforme à l'intérieur du conducteur selon la direction du champ appliqué. On peut alors définir une nouvelle quantité : **la mobilité** de l'électron dans le conducteur μ_e.

$$\boxed{\Rightarrow \vec{v_0} = -\frac{e}{k}\vec{E} = \mu_e\vec{E}}$$

$\boxed{\vec{v_0} = -\frac{e}{k}\vec{E} = \mu_e \vec{E}}$ telle que $\mu_e < 0$ et $[\mu_e] = m^2 s^{-1} V^{-1}$

2. *Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité*

Pour l'ensemble des électrons:

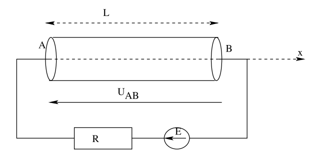
$\vec{j}$ devient $\Longrightarrow \vec{j} = -ne\vec{v_0} = \frac{ne^2}{k}\vec{E}$ est donc dirigée selon $\vec{E}$.

C'est la loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ avec } \gamma = \frac{ne^2}{k}}$

- tel que $\gamma > 0$ et $[\gamma] = \Omega^{-1} m^{-1}$. γ est appelée conductivité du conducteur.
- On définit ρ la résistivité du conducteur par $\rho = \frac{1}{\gamma}$

$\rho = \frac{k}{ne^2} \Longrightarrow$ est proportionnelle à k, cad à la résistance au mvt des e^- dans le conducteur exercée par le milieu extérieur.

3. *Loi d'Ohm macroscopique*



$U_{AB} = V_A - V_B$ et $\vec{E} = \frac{U}{L}\vec{e_x}$ où $I = \vec{J} \cdot S\vec{e_x} = \gamma \vec{E} \cdot S\vec{e_x} = \gamma \frac{S}{L} U$

$$\boxed{U = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} I = RI}$$

avec $R = \frac{L}{\gamma S}$ résistance du conducteur exprimée en Ω

4. *Loi de Joule*

i. Puissance Joule

Lorsque le régime permanent est établi alors : (permanent→ indépendant de t, par définition $a(t) = 0$)

$$\vec{f} = -k\vec{v_0} = -k\frac{-e}{k}\vec{E} = e\vec{E} \quad \text{les 2 forces se compensent}$$

Le travail de $\vec{f}$ pendant $[t, t+dt]$ est :

$$W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v_0}\Delta t = e\vec{E} \cdot \left(\frac{-e}{k}\right)\vec{E}\Delta t = -\frac{e^2E^2}{k}\Delta t$$

$\boxed{W(\vec{f}) = -\frac{e^2U^2}{kL^2}\Delta t \text{ travail de la force de frottement pour 1 } e^-}$

Pour l'ensemble des e^-contenus dans le volume $V = SL$, l'énergie dissipée par "frottement" est :

$$\Delta W = \left(-\frac{e^2U^2}{kL^2}\Delta t\right) \times nSL = -\left(\underbrace{n\frac{e^2}{k}}_{\gamma}\underbrace{\frac{S}{L}}_{\frac{1}{R\gamma}} U^2\right)\Delta t$$

Or $\gamma = \frac{ne^2}{k}$ et $R = \rho\frac{L}{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} \Longrightarrow R\gamma = \frac{L}{S}$

$\Longrightarrow \Delta W = -\frac{\gamma U^2}{R\gamma}\Delta t$ avec $U = RI$

$$\boxed{\Longrightarrow \Delta W = RI^2\Delta t}$$

ce qui conduit à l'expression de la puissance dissipée :

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = RI^2 \text{ Puissance Joule}}$$

M.A. Lebeault

ii Coexistence de plusieurs types de charge

Plusieurs type de charges positives ou négatives sont susceptibles d'être mobiles. Elles sont caractérisées par :

- n_i : densité des particules i
- v_i : vitesse des particules i en régime permanent
- q_i : charge des particules i

Soit $\vec{E} = E\vec{e_x}$ le champ uniforme qui règne à l'intérieur du conducteur.

$$\vec{v_i} = \mu_i \vec{E} \quad \begin{array}{l} \mu_i > 0 \text{ si charge } q_i > 0 \\ \\ \mu_i < 0 \text{ si charge } q_i < 0 \end{array}$$

M.A. Lebeault

Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
Intensité d'un faisceau de particules
Vecteur densité de courant $\vec{j}$
Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
Loi d'Ohm macroscopique
Loi de Joule
Puissance Joule

Le vecteur densité de courant total est alors :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= n_1 q_1 \vec{v_1} + n_2 q_2 \vec{v_2} + \ldots + n_i q_i \vec{v_i} + \ldots \\ \vec{j} &= [n_1 q_1 \mu_1 + n_2 q_2 \mu_2 + \ldots]\vec{E} \\ \vec{j} &= \left(\sum_{i=1}^{N} n_i q_i \mu_i\right)\vec{E} \end{aligned}$$

La conductivité totale du milieu est

$\vec{j} = \gamma\vec{E} \Longrightarrow \gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i q_i \mu_i$

- Remarque: $q_i\mu_i > 0$ toujours vrai car q_i et μ_i de même signe $\Longrightarrow \gamma$ est toujours POSITIF.