### Chapitre IV : Etude des régimes transitoires

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes stationnaires

R,L,C

Relation Énergie en jeu temps fini

Circuit R.C en série

Décharge du condensateur

Circuit R,L en série Établissement du Arrêt du courant

### Plan

- approximation des régimes quasi-stationnaires
- 2 Dipôles électrocinétiques R.L.C
  - Relation courants-tensions
  - Énergie en jeu
  - Énergie sur un intervalle de temps fini
- 3 Circuit *R.C* en série
  - Charge du condensateur q(t)
  - Décharge du condensateur
- 4 Circuit R,L en série
  - Établissement du courant
  - Arrêt du courant
- 5 Circuit R,L,C en série
  - Régime apériodique  $\Delta > 0$
  - Régime critique  $\Delta = 0$
  - Régime oscillatoire amorti  $\Delta < 0$

### II. Dipôles électrocinétiques R,L,C II.1) Relation courant-tension

#### M.A. Lebeault

des régimes stationnaires

Dipôles élec-R,L,C

### courants-tension

Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de temps fini

Circuit R.C. en série

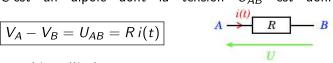
Circuit R,L en série

Établissement du Arrêt du courant

### \* Résistance:

C'est un dipôle dont la tension  $U_{AB}$  est donnée par:

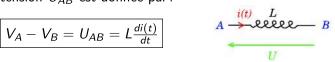
$$V_A - V_B = U_{AB} = R i(t)$$



### **★** Bobine d'inductance *L*:

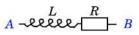
C'est une source de tension de f.e.m.:  $e(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$  dont la tension  $U_{AB}$  est donnée par :

$$V_A - V_B = U_{AB} = L \frac{di(t)}{dt}$$



remarque : cette entité est une représentation théorique utile pour modéliser u(t) et i(t).

Une bobine présente un inductance Lassociée en série à une résistance R



### I. approximation des régimes quasi-stationnaires

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes auasistationnaires

Dipôles élec-R, L, C

Énergie en jeu

temps fini

Circuit R.C en série Charge du

Décharge du Circuit R,L en série

Établissement du Arrêt du courant

Entre deux régimes permanents (stationnaires) il existe un régime transitoire, qui varie en fonction du temps, mais pour lequel pour chaque instant t on peut appliquer les lois des régimes permanents.

### à t fixé:

- Validité des lois de Kirchhoff
- l'intensité I(t fixé) = constante
- il faut prendre en considération les fem d'auto-induction en plus des fem des générateurs (E).

C'est l'approximation des régimes quasi-stationnaires ou lentement variable. Cette approximation est valide pour les courants industriels, mais inopérante pour l'étude des antennes ou circuits-radio.

#### M.A. Lebeault

des régimes quasistationnaires

Dipôles électrocinétiques R,L,C

## courants-tension

Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de

Circuit R,C en série

Charge du condensateur

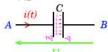
Circuit R,L en série

> Établissement du Arrêt du courant

### **★ Condensateur de capacité** *C*:

C'est un dipôle dont la tension  $U_{AB}$  est donnée par:

$$V_A - V_B = U_{AB} = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C}$$



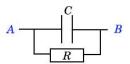
i > 0 charge i < 0 décharge

Où q(t) est la charge de l'armature A "borne d'entrée" et telle que  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ 

remarque : cette entité est une représentation théorique utile pour modéliser u(t) et i(t).

Un condensateur présente une capacité

C associée en parallèle à une résistance



# II.2) Énergie en jeu W

#### M.A. Lebeault

des régimes

R, L, C

Relation

### Énergie en jeu

Circuit R.C en série

Décharge du condensateur

en série

Établissen Arrêt du courant Énergie élémentaires aux bornes d'une branche AB :

$$dW = U_{AB}i_{AB}(t)dt$$

- Résistance  $R: dW = Ri^2 dt$
- Inductance  $L: dW = L\frac{di}{dt}idt = Lidi = d(\frac{1}{2}Li^2)$ . donne l'énergie emmagasinée dans une self

L parcourue par un courant i.

- Capacité  $C: \left| dW = \frac{q}{c} i dt = \frac{q}{c} dq = d \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) \right|$

donne l'énergie emmagasinée dans un condensateur C chargé avec q.

- Générateur E: dW = Eidt
- Récepteur ( moteur,...) e: dW = eidt

# III. Circuit R,C en série

M.A.

Lebeault approximatio

des régimes auasi-

stationnaires

Dipôles élec-

R, L, C

temps fini

en série

Circuit R.C

Décharge du

Circuit R,L

Établissement du

Arrêt du couran

en série

II.3) énergie sur un intervalle de temps fini

II.3) énergie sur un intervalle de temps.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U(t)i(t)dt$$

III. Circuit R.C en série

III.1) Charge du condensateur q(t)

Évolution de la charge et du courant : loi des mailles

$$E - Ri - U_C = 0$$
 avec  $i = \frac{dq(t)}{dt}$  et  $U_C = \frac{q(t)}{C}$ 

équation différentielle en q(t):

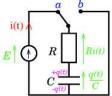
 $R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$ 

Solution générale de la forme :

 $q(t) = CE + q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ 

Condition initiale: à t = 0 le condensateur est déchargée  $q(t=0)=0 \rightarrow q_0=-CE$ 

Solution:  $q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$  et  $i(t) = \frac{dq}{dt}$   $i(t) = \frac{E}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$ 



# III.1) Charge du condensateur q(t)

#### M.A. Lebeault

approximatio des régimes

Dipôles élec-R, L, C

Énergie en jeu Énergie sur ur intervalle de

Circuit R, en série

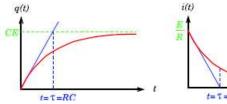
Circuit R,L en série Établissement du Arrêt du courant

On a donc:  $q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ 

soit la tension aux bornes du condensateur

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

et l'intensité dans le circuit  $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ 



En régime permanent, le courant est continu et un condensateur se comporte comme un "coupe-circuit" (c-a-d comme un interrupteur ouvert).

# III.1) Charge du condensateur

Constante de temps du circuit R,C:

### M.A. Lebeault

des régimes stationnaires

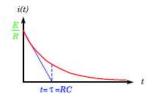
Dipôles élec-R, L, C

Circuit R,0 en série

Décharge du

Circuit R,L en série Établissem

Arrêt du couran



• la pente de la courbe q(t) est  $\frac{dq}{dt}$  et correspond à i(t).

On introduit la constante  $\tau = RC$ , homogène à un temps :

La constante de temps  $\tau = RC$  caractérise la rapidité avec

laquelle le condensateur atteint sa charge maximale.

 $q(t)=CE\left(1-e^{-rac{t}{ au}}
ight)$  ,  $U_C(t)=E\left(1-e^{-rac{t}{ au}}
ight)$  et  $i(t)=rac{E}{R}e^{-rac{t}{ au}}$ 

- A t=0 l'intensité  $i=\frac{E}{R}$
- la tangente à l'origine de la courbe q(t) coupe la droite (limite asymptotique) q = CE pour  $t = \tau = RC$ .

### rappel: équation de la tangente

#### M.A. Lebeault

des régimes

R, L, C

Énergie en jeu

Circuit R.C en série

Décharge du condensateur

Circuit R,L en série

Établisses Arrêt du courant

#### Rappel: Tangente en un point A

courbe représentative de y = f(x)



 $\lim q(t) = CE$ 

Coefficient directeur de la tangente en A:

 $coeff = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \Leftrightarrow f'(x_A) = \frac{y - f(x_A)}{x - x_A}$  Equation de la tangente en A de la courbe  $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$ 

### Application à la fonction q(t): tangente à l'origine



La tangente en  $t = \tau = RC \rightarrow y(\tau) = \frac{E}{R} \times RC = EC$ La tangente à l'origine coupe l'asymptote en  $t = \tau$ 

### Étude énergétique lors de la charge de C

#### M.A. Lebeault

approximatio des régimes auasistationnaires

Dipôles électrocinétiques R, L, C

Circuit R.C en série

Décharge du

en série

Arrêt du couran

Étude énergétique lors de la charge de C

l'équation différentielle obtenue par la loi des mailles est une relation en "tension":

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

l'énergie pendant dt est de la forme  $U \times idt$  où idt = dg(t). On a donc:

$$\underbrace{Ri^2(t)dt}_{\text{NRJ Joule dissipée par R}} + \underbrace{\frac{q(t)}{C}dq(t)}_{\text{NRJ stockée dans C}} = \underbrace{\underbrace{\textit{Eidt}}_{\text{NRJ fournie par E}}}_{\text{NRJ fournie par E}}$$

remarque: l'énergie stockée dans le condensateur est de l'énergie électrostatique (charges statiques sur les armatures).  $\frac{q(t)}{C}dq(t)=d\left(\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}\right)$  traduit une variation positive.

### III.2) Décharge du condensateur

#### M.A. Lebeault

des régimes stationnaires

Dipôles élec-R,L,C

Énergie en jeu

Circuit R.C en série

Circuit R,L en série

Établissement du Arrêt du courant

### III.2) Décharge du condensateur q(t)

Évolution de la charge et du courant : loi des mailles

$$Ri + U_C = 0$$
 avec  $i = \frac{dq(t)}{dt}$  et  $U_C = \frac{q(t)}{C}$ 

équation différentielle en q(t):

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

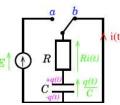
Solution générale de la forme :

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Condition initiale: à t = 0 le condensateur est chargé

$$q(t=0) = Q = CE \rightarrow q_0 = CE$$

Solution: 
$$q(t) = CE\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



et 
$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = \frac{-E}{R}e^{-\frac{RC}{RC}}$$

# Évolution de la charge et du courante

#### M.A. Lebeault

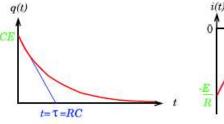
des régimes

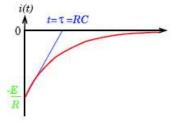
Dipôles élec-R, L, C

Circuit R.O

Circuit R,L en série

Établissem Arrêt du couran Représentation graphique de q(t) et i(t) dans le circuit :  $q(t) = ECe^{-\frac{t}{\tau}}$  et  $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ 





- l'asymptote est l'axe des abscisses t.
- constante de temps  $\tau = RC$ , caractérise la vitesse de décharge du condensateur.
- les tangentes à l'origine coupe cet axe en  $t=\tau$

# Étude énergétique lors de la décharge de C

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes quasistationnaires

Dipôles électrocinétiques R, L, C

courants-tensions Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de temps fini

Circuit R,C en série

Décharge du condensateur

Circuit R,L en série Établissement de courant Arrêt du courant Étude énergétique lors de la décharge de C

l'équation différentielle obtenue par la loi des mailles est une relation en "tension" :

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

l'énergie pendant dt est de la forme  $U \times idt$  où idt = dq(t). On a donc :

$$\underbrace{Ri^2(t)dt}_{\text{NRJ Joule dissipée par R}} + \underbrace{\frac{q(t)}{C}dq(t)}_{\text{NRJ stockée dans C}} = 0$$

remarque : l'énergie stockée  $\frac{q(t)}{C}dq(t)=d\left(\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}\right)$  traduit une variation négative. L'énergie stockée dans le condensateur est totalement dissipée par effet Joule !

# IV. Circuit R,L en série IV.1) Établissement du courant

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes quasi-

Dipôles électrocinétiques R,L,C

Relation courants-tension Énergie en ieu

Énergie en jer Énergie sur ur intervalle de temps fini

Circuit *R*,*C* en série

condensateur q(

Circuit R,L

Établissement courant

Évolution de l'intensité du courant i(t)

loi des mailles:  $E - U_R - U_L = 0$ 

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E}$$

solution générale:

 $i(t) = \frac{E}{R} + i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$  condition initiale:

à t = 0 la bobine s'oppose à l'établissement du courant. i(0) = 0 Solution :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Constante de temps du circuit

Le terme  $\frac{L}{R}$  est homogène à un temps.  $\tau = \frac{L}{R}$  est la constante de temps du circuit R,L.

# IV.1) Le courant i(t) lors de la charge de la bobine

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes quasistationnaires

Dipôles électrocinétiques R,L,C

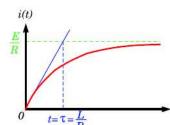
Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de

Circuit R,C en série

Charge du condensateur q(1 Décharge du condensateur

Circuit R,L en série

Établissement du courant Arrêt du courant Représentation graphique de  $i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ 



- augmentationexponentielle de i(t)
- $\lim_{t \to \infty} \frac{E}{R} \left( 1 e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{R}$
- la tangente à l'origine coupe l'asymptote à  $t = \tau = \frac{L}{B}$

Lorsque le régime permanent est atteint, pour  $t > 7\tau$ , le courant  $I = \frac{E}{R}$ : une bobine se comporte comme un court-cicuit

$$\frac{\text{Étude \'energ\'etique:}}{Li(t)di(t)} \frac{L\frac{di(t)}{dt} \times idt + Ri(t) \times idt = E \times idt}{Ri^2(t)} = \underbrace{Eidt}$$

NRJ emmagasinée par L NRJ joule dissipée dans R NRJ fournie par E

## IV.2) Arrêt du courant

#### M.A. Lebeault

approximation des régimes quasistationnaires

Dipôles électrocinétiques *R*,*L*,*C* 

courants-tensions Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de

Circuit R,C en série

condensateur q(t Décharge du condensateur

Circuit R,L en série Établissement de

Arrêt du courant

Évolution de l'intensité du courant i(t)

loi des mailles:  $U_R + U_L = 0$ 

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$
 solution générale:

solution generale:  $i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ 

condition initiale:

à t=0 la bobine se comporte comme un fil.  $i(0)=i_0=\frac{E}{R}$  Solution :



Constante de temps du circuit

Le terme  $\frac{L}{R}$  est homogène à un temps.  $\tau = \frac{L}{R}$  est la constante de temps du circuit R,L.

Ri(t)

# IV.2) Le courant i(t) lors de la décharge de la bobine

#### M.A. Lebeault

des régimes

R, L, C

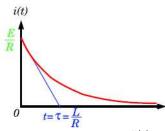
Énergie en jeu

Circuit R.C en série

Circuit R,L en série

Arrêt du courant

## Représentation graphique de $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$



 décroissance exponentielle de i(t)

 la tangente à l'origine coupe l'asymptote à

$$t = \tau = \frac{L}{R}$$

Étude énergétique:  $L\frac{di(t)}{dt} \times idt + Ri(t) \times idt = 0$ Li(t)di(t)

NRJ libérée par L NRJ joule dissipée dans R

Lorsque le régime permanent est atteint, pour  $t > 7\tau$ , le courant I = 0: l'énergie magnétostatique libérée par L est dissipée par effet Joule dans R.

 $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$ , l'équation caractéristique admet 2 racines

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

 $q(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$  où A et B sont des constantes.

### V. Circuit R,L,C en série

#### M.A. Lebeault

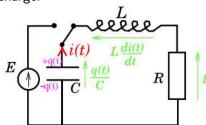
des régimes

Dipôles élec-R, L, C

en série

Arrêt du courar

Soit le circuit ci-dessous où le condensateur a été préalablement chargé.



- le condensateur se décharge:  $\frac{dq(t)}{dt} < 0$
- avec l'orientation Ri(t) choisie  $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$ 
  - loi des mailles:  $U_C - U_I - U_R = 0$

Équation différentielle en q(t) vérifiée par le circuit: maille  $\rightarrow \frac{q(t)}{C} - L \frac{di(t)}{dt} - Ri(t) = 0$ 

 $L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$  équation différentielle du 2<sup>nd</sup>

ordre. Cette équation admet pour équation caractéristique:  $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$  dont le discriminant  $\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$ . Suivant le signe de  $\Delta$  différents régimes sont possibles.

# V.1) Régime apériodique $\Delta > 0$

réelles négatives :  $r_{1,2}=rac{R}{2L}\pm\sqrt{rac{R^2}{4L^2}-rac{1}{LC}}.$ 

q(0) = Q charge du condensateur au départ

i(0) = 0 courant pour un condensateur chargé.

#### M.A. Lebeault

des régimes

Dipôles élec R, L, C

Énergie en jeu

Circuit R.C en série

Circuit R, L en série Établisse Arrêt du courar  $i(0) = -\frac{dq(t)}{dt}|_{t=0} = 0 \rightarrow 0 = -r_1A - r_2B$ soit  $A = \frac{Qr_2}{r_1 - r_2}$  et  $B = \frac{Qr_1}{r_1 - r_2}$ Point d'inflexion

Conditions initiales à t=0:

 $q(0) = Q \rightarrow Q = A + B$ 

 $q(t) = \frac{Q}{r_1 - r_2} (r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t})$   $i(t) = \frac{-Qr_1r_2}{r_1 - r_2} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t})$ 

# V.1) Régime critique $\Delta = 0$

### M.A. Lebeault

approximatio des régimes

R, L, C

en série

Arrêt du couran

 $\Delta=R^2-4rac{L}{C}=$  0, l'équation caractéristique admet 1 racine double réelle négative :  $r = \frac{-R}{2I} = \frac{-2}{RC}$ . La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

 $q(t) = (A + Bt) e^{rt}$  où A et B sont des constantes.

Conditions initiales à t=0:

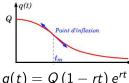
q(0) = Q charge du condensateur au départ

i(0) = 0 courant pour un condensateur chargé.

$$q(0) = Q \rightarrow Q = A$$

$$i(0) = -\frac{dq(t)}{dt}|_{t=0} = 0 \to 0 = -B - Ar$$

soit A = Q et B = -Qr



### V.3) Régime oscillatoire amorti $\Delta < 0$

M.A. Lebeault

approximation des régimes quasistationnaires

Dipôles électrocinétiques *R*,*L*,*C* 

courants-tensions Énergie en jeu Énergie sur un intervalle de temps fini

Circuit R,C en série

condensateur q
Décharge du
condensateur

Circuit R,L en série Établissement du courant Arrêt du courant  $\Delta=R^2-4\frac{L}{C}<0$ , l'équation caractéristique admet 2 racines complexes :  $r_{1,2}=\frac{R}{2L}\pm i\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$ .

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}} \left( A e^{i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t} + B e^{-i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t} \right)$$

où A,B constantes. On pose pour alléger l'écriture :

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$
Alors  $q(t) = e^{-\lambda t} \left( Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right)$ 

ou d'une autre façon

$$q(t) = e^{-\lambda t} \left( A' cos\omega t + B' sin\omega t \right)$$

et par dérivation  $i(t) = \frac{-dq(t)}{dt}$ : i(t) =

$$-e^{-\lambda t}\left(-\omega A' sin\omega t+B'\omega cos\omega t
ight)+\lambda e^{-\lambda t}\left(A' cos\omega t+B' sin\omega t
ight)$$

$$i(t) = e^{-\lambda t} \left[ (\lambda A' - \omega B') \cos \omega t + (\lambda B' + \omega A') \sin \omega t \right]$$

### régime pseudo-périodique: représentation

M.A. Lebeault

approximation des régimes quasi-

Dipôles électrocinétiques R,L,C

Relation courants-tension

Énergie en jer Énergie sur ur intervalle de temps fini

Circuit R,C en série

Charge du condensateur q( Décharge du condensateur

Circuit R,L en série

Établissement d courant Arrêt du couran Conditions initiales à t = 0:

q(0)=Q charge du condensateur au départ i(0)=0 courant pour un condensateur chargé. soit A'=Q et  $B'=\frac{\lambda}{\Omega}Q$ 

