Plan

M.A. Lebeault

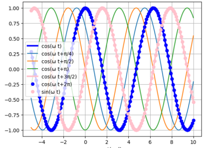
I.définitions
I.1 fonctions périodiques

a. Fonction périodique : $f(t) = f(t + kT)$ où k entier et T est la période, $N = \frac{1}{T}$ la fréquence. $[T] = s$ et $[N] = Hz$

b. Fonction alternative : $f(t) = -f(t + \frac{T}{2}) \quad \forall t$

c. Fonction sinusoïdale : périodique et alternative

- $f(t) = a\cos(\omega t + \phi)$
- $\omega = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}$ est la la pulsation
- a est l'amplitude maximale
- ϕ est le déphasage ou phase à l'origine
- rqm : $f(t) = a\cos(\omega t + \phi) = a(\cos(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\sin\phi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
- période de $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + 2k\pi + \phi)$ avec $k = 1 \rightarrow \omega T = 2\pi$ d'où $T = \frac{2\pi}{\omega} \cdots$



fonction périodique : valeur moyenne et valeur efficace

i. Définitions

<u>Valeur moyenne temporelle</u> $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

<u>Valeur efficace</u> $(f_{\text{eff}})^2 = \langle f^2(t)\rangle|_T = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$

ii. Application à $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

valeur moyenne sur une période T:

$$\langle i(t)\rangle = \frac{I_m}{T}\int_0^T cos(\omega t + \phi)dt = \frac{I_m}{T}\left[\frac{\sin(\omega t + \phi)}{\omega}\right]_0^T$$

$$\langle i(t)\rangle = \frac{I_m}{T\omega}[\sin(2\pi + \phi) - \sin(\phi)] = 0$$

$$\langle i(t)\rangle = 0$$

Application : valeur efficace de $i(t)$

Valeur efficace :

$$(I_{\text{eff}})^2 = \langle i^2(t) \rangle|_T = \frac{1}{T}\int_0^T (I_m \cos(\omega t + \phi))^2 dt$$

trigo : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $1 = \cos^2 a + \sin^2 a$ donc $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

période : T_1 période de $\cos \omega t \rightarrow T_1 \omega = 2\pi$ alors $T_2 2\omega = 2\pi \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{2\omega} \rightarrow T_2 = 2T_1$

$$(I_{\text{eff}})^2 = \frac{I_m}{T_1}\int_0^{T_1 = T_2/2} \frac{1+\cos(2\omega t + 2\phi)}{2} dt$$

$$(I_{\text{eff}})^2 = \frac{2I_m}{T_2}\left\{\left[\frac{t}{2}\right]_0^{T_2/2} + \left[\frac{\sin(2\omega t + 2\phi)}{2\times 2\omega}\right]_0^{T_2/2}\right\}$$

$$(I_{\text{eff}})^2 = \frac{2I_m}{T_2}\frac{T_2}{4} + 0$$

$$(I_{\text{eff}})^2 = \frac{I_m}{2} \rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Courant et tension (alternatifs sinusoïdaux)

M.A. Lebeault

iii. Courant alternatif sinusoïdal

Définition : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$

iv. Tension alternative sinusoïdale

Définition : $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$

M.A. Lebeault

Définitions
- Les fonctions périodiques
- La notation complexe

Notion d'impédance complexe
- Définition
- Diagramme de Fresnel
- Association d'impédances complexes

Lois générales
- Équations électrocinétiques
- Loi d'Ohm généralisée
- Loi de Kirchhoff
- Théorèmes Millmann, Thevenin, Kenelly ...

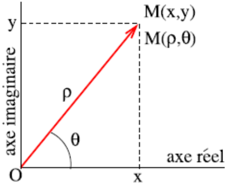
Puissance

a. Définition et propriétés

- **Définition** : un nombre complexe $\overline{Z}$ est défini par 2 réels et le complexe i ou j (tel que $i^2 = -1, j^2 = -1$) :
  $\overline{Z} = x + iy = x + jy$
  dans ce cours on choisit $\overline{Z} = x + jy$ *pour ne pas confondre avec la notation des courants.*
- Le complexe conjugué de $\overline{Z} \rightarrow \overline{Z}^* = x - jy$
- Le module ρ :
  $|\overline{Z}| = \rho = \sqrt{\overline{Z}\,\overline{Z}^*} = \sqrt{\overline{Z}^*\overline{Z}} = |\overline{Z}^*| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- L'argument θ **en rad** de $\overline{Z}$ tel que $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- **Forme polaire** : $\overline{Z} = \rho e^{j\theta} \rightarrow \overline{Z}^* = \rho e^{-j\theta}$
  relation entre formes polaire et algébrique :
  $\overline{Z} = \rho e^{j\theta} = \rho\,(\cos\theta + j\sin\theta) = x + jy$
  $\rightarrow x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$
  $\overline{Z}^* = \rho e^{-j\theta} = \rho\,(\cos\theta - j\sin\theta) = x - jy$
  $\rightarrow x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$

I.2 notation complexe Représentation et Opérations

b. Représentation d'un nombre complexe



La forme algébrique est adaptée au système de coordonnées cartésien (x,y) la forme polaire est adaptée au système de coordonnées polaires (ρ,θ).
Le point M dans la figure représente le nombre $\overline{Z} = x + jy = \rho e^{j\theta}$

c. Opérations avec les nombres complexes

Soient 2 nombres complexes $\overline{Z_1} = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ et $\overline{Z_2} = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$.

- égalité: $\overline{Z_1} = \overline{Z_2} \rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, \rho_1 = \rho_2, \theta_1 = \theta_2 (2\pi)$
- addition, soustraction :
  $\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
  $\overline{Z_1} - \overline{Z_2} = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2)$
- Multiplication : $\overline{Z_1} \times \overline{Z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$
  ou plus direct en polaire : $\overline{Z_1} \times \overline{Z_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

M.A. Lebeault

- Division:
$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} = \frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} \times \frac{x_2-jy_2}{x_2-jy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + j\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$
ou en polaire : $\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$
- Exponentiation, formule de Moivre :
$$\overline{Z}^n = \left(\rho e^{j\theta}\right)^n = \rho^n e^{jn\theta} = \rho^n \left(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\right)$$
$$\overline{Z}^n = X_n + jY_n \rightarrow X_n = \rho^n \cos(n\theta), Y_n = \rho^n \sin(n\theta)$$

d. Représentation complexe d'une fonction sinusoïdale

Soit le courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ on associe à cette fonction réelle la fonction complexe :
$$\bar{i}(t) = Ie^{j(\omega t+\phi)} = Ie^{j\phi}e^{j\omega t} = \bar{I}e^{j\omega t}$$
remarque : $\Re_e(\bar{i}(t)) = I\cos(\omega t + \phi) \rightarrow I = I_m$ et $|\bar{I}| = Im$

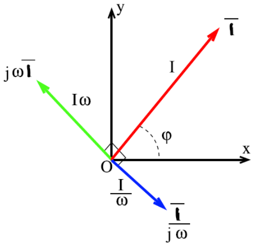
e. Dérivation et Intégration d'une fonction complexe

Soit le courant représenté par $\bar{i}(t) = \overbrace{\bar{I}}^{Ie^{j\varphi}} e^{j\omega t}$

- Dérivée : $\frac{d\bar{i}(t)}{dt} = j\omega \bar{I} e^{j\omega t} = j\omega \bar{i}(t)$
- l'intégrale: $\int \bar{i}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\bar{I}e^{j\omega t} = \frac{\bar{i}(t)}{j\omega}$

f. Représentation dans le plan complexe

avec $j = e^{i\frac{\pi}{2}}$
et $\frac{1}{j} = -j = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
on peut représenter l'intégration et la dérivation par des rotations de 90° et -90°.



Dans un réseau on positionne des dipôles passifs (résistances, moteurs, condensateurs, bobine,...) alimentés par des générateurs. En utilisant des générateurs de tensions sinusoïdales (couramment produits (EDF)), on cherchera à déterminer pour chaque branche du réseau :

- les courants sinusoïdaux (amplitude, déphasage) dans les dipôles
- les tensions mesurées aux bornes (amplitude, déphasage).

Comme vu au chapitre IV, il va donc falloir résoudre des équations différentielles. En utilisant les formes complexes $\overline{u}(t)$ et $\overline{i}(t)$, la dérivation et l'intégration deviennent des opérations "linéaires" de $\times j$ ou $\frac{1}{j}$. Pour caractériser les réseaux, il faut alors utiliser la notion d'impédance complexe pour caractériser les dipôles passifs.

M.A. Lebeault

Impédance complexe : Définition

Soit un générateur délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ on lui associe $\overline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$.
Le courant passant par un dipôle peut être déphasé $i(t) = I\cos(\omega t + \phi) \rightarrow \overline{i}(t) = \overline{I}e^{j\omega t}$ où $\overline{I} = Ie^{j\phi}$
On définit l'impédance complexe $\overline{Z}$ par la relation courant-tension associée à chaque dipôle :

$$\overline{u}(t) = \overline{Z}\,\overline{i}(t)$$

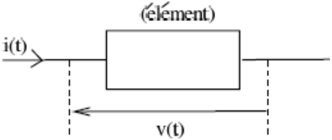
où $\overline{u}(t) = \overline{u}e^{j\omega t}$, $\overline{i}(t) = \overline{i}e^{j\omega t}$ et $\overline{Z}$ indépendant du temps pour un dipôle passif. Alors on aura :

$$\overline{u} = \overline{Z}\,\overline{i}$$

relation qui permet une représentation dans le plan complexe pour une résolution graphique des problèmes de réseau!

II. Notion d'impédance complexe
II.1) Definition

convention



Dipôle	Tension réelle
résistance R	$v = Ri$
bobine L	$v = L\frac{di}{dt}$
condensateur C	$v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$

$$\overline{v}(t) = \overline{Z}\,\overline{i}(t)$$

Impédances complexes

	Tension complexe
R	$\overline{v} = R\overline{i}$
L	$\overline{v} = L\frac{d\overline{i}}{dt} = jL\omega\overline{i}$
C	$\overline{v}\frac{1}{C}\int \overline{i}dt = \frac{1}{jC\omega}\overline{i}$

Résumé

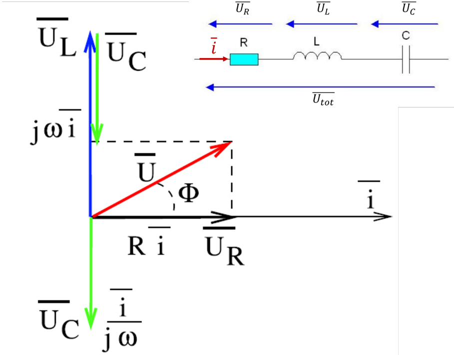
Dipôle	Impédance complexe $\overline{Z}$
R	$\overline{Z_R} = R$
L	$\overline{Z_L} = jL\omega$
C	$\overline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$

De manière générale une impédance est de la forme
$\overline{Z} = R + jX$ où R est la résistance, X la réactance.

M.A. Lebeault

2. Diagramme de Fresnel d'une série de dipôles

Basé sur la représentation dans le plan complexe, ce diagramme donne les tensions complexes de chaque dipôle dans un circuit en série.
L'impédance complexe du circuit est obtenue à partir de la lecture graphique de $\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{i}$.



3. Association (série et parallèle)

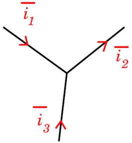
en série : $\overline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z_i}$	en parallèle : $\frac{1}{\overline{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z_i}}$

1. **Équations électrocinétiques** Toutes les lois établies en régime continu dans les réseaux sont généralisées aux réseaux en régime alternatifs en remplaçant les **courants (k branches) et les tensions des m (tous les) dipôles** par :
   - soit les grandeurs instantanées $i_k(t)$ et $v_m(t)$
   - soit les grandeurs complexes $\overline{i_k}(t)$ et $\overline{v_m}(t)$
2. **Loi d'Ohm généralisée**

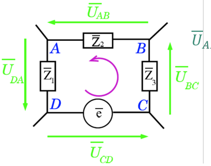
dipôle passif : $\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{i}$	dipôle actif : $\overline{U} = \overline{e} - \overline{Z}\,\overline{i}$

3. **Loi de Kirschhoff**

loi des noeuds : $\sum_n \overline{i_n} = 0$ loi des mailles : $\sum_k \overline{U_k} = 0$

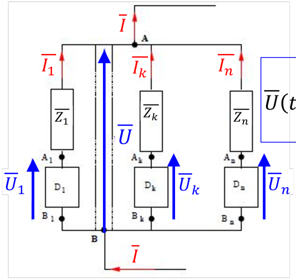


$\overline{i}_1 - \overline{i}_2 + \overline{i}_3 = 0$



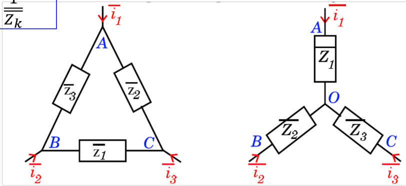
$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CD} + \overline{U}_{DA} = 0$

Théorème de Millmann



$$\overline{U}(t) = \frac{\sum_k \frac{\overline{U_k}(t)}{\overline{Z_k}} - \overline{I}}{\sum_k \frac{1}{\overline{Z_k}}}$$

Théorème de Kennelly

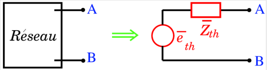


$$\overline{Z_1} = \frac{\overline{Z_2}\,\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}}$$

$$\overline{Z_2} = \frac{\overline{Z_1}\,\overline{Z_3}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}}$$

$$\overline{Z_3} = \frac{\overline{Z_1}\,\overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}}$$

Théorème de Thévenin



$\overline{e_{th}}$ =d.d.p entre A et B en circuit ouvert
$\overline{Z_{th}}$ à l'impédance du dipôle entre A et B à « sources éteintes ».

M.A. Lebeault

1.Puissance instantanée

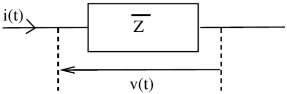
définition :

la puissance instantanée aux bornes d'un dipôle est donnée par :

$p(t) = u(t)\, i(t)$

avec $u(t) = U_m \cos(\omega t)$

et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$



l'énergie élémentaire :

$dW = p(t)dt = u(t)\, i(t)\, dt$

$= U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) dt$

2.Puissance active P_a

P_a aux bornes d'un dipôle est la moyenne de la puissance instantanée sur une période T.

$$P_a = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt$$

$$p = U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$U_m I_m \left[\cos\phi \cos^2(\omega t) - \sin\phi \cos(\omega t) \sin(\omega t)\right]$$

$$\int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{[\sin(\omega t]_0^T}{2\omega} = 0$$

d'où

$$P_a = \frac{U_m I_m \cos\phi}{2} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi$$

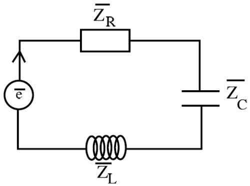
Dans $$\boxed{P_a = \frac{U_m I_m \cos\phi}{2} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \underbrace{\cos\phi}_{\text{facteur de puissance}}}$$

Exemple : circuit R,L,C en série en régime alternatif

équations de base

Soit un circuit R,L,C alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t + \phi)$

Schéma



Équation de la maille

$U_R + U_L + U_C - e(t) = 0$

on pose

$\overline{e}(t) = Ee^{j\phi}e^{j\omega t}$

$\overline{e}(t) = \overline{E}e^{j\omega t}$

et $\overline{i}(t) = \overline{I}e^{j\omega t}$

$\overline{i}(t) = Ie^{j\omega t}$

avec la loi d'Ohm généralisée

$\overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C} = \overline{e}(t)$

$\overline{Z_R}\,\overline{i}(t) + \overline{Z_L}\,\overline{i}(t) + \overline{Z_C}\,\overline{i}(t) = \overline{e}(t)$

On utilise les expressions des impédances de R,L,C

$R\overline{i}(t) + jL\omega\overline{i}(t) + \frac{\overline{i}(t)}{jC\omega} = \overline{e}(t)$

$\overline{e}(t) = (R + jX)\overline{i}(t) = \overline{Z}\,\overline{i}(t)$

où $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

donc $\overline{E} = Ee^{j\phi} = I\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$

$\tan\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$

$I = \frac{|\overline{E}|}{|R+jX|} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

$I = \frac{E}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$

Exemple : circuit R,L,C en série en régime alternatif

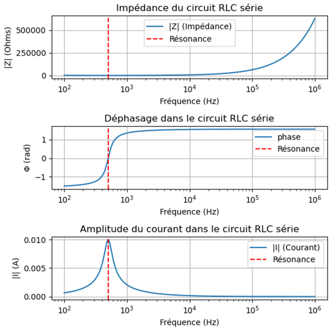
Résonance

- $I = \dfrac{E}{R\sqrt{1+\left(\frac{L\omega}{R}-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$ est max si $\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega} = 0 \rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. ω_0 est appelée pulsation propre.
- Alors $\dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = Q$ définit le facteur de qualité.
- On peut réécrire $I = \dfrac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$
- et le déphasage $\tan\phi = Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$

$R = 100 \quad ohms$
$L = 0{,}1 \quad Henry$
$C = 1 \quad \mu Farad$
$E = 1\, V$

Fréquence de résonance f_0 :
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 503.29\ Hz$

Facteur de qualité $Q = 3.16$



Exemple : circuit R,L,C en série en régime alternatif

Méthode de Fresnel