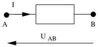
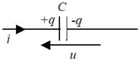
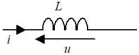
M.A. Lebeault

Plan

Loi d'Ohm pour un dipôle linéaire

- <u>Résistor ou Résistance :</u> 

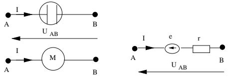
$\Longrightarrow U = R \cdot I$ et $I = G \cdot U$
Puissance absorbée $P_a = U \cdot I = RI^2 = GU^2$ Où R est la résistance et $G = \frac{1}{R}$ la conductance
- <u>Condensateur :</u> 

$\Longrightarrow U = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ et $i = C\frac{dU}{dt}$
Énergie emmagasinée $W = QU = \frac{1}{2}CU^2$ Où C est la capacité et $Q = CU$ la charge.
- <u>Bobine</u> 

$\Longrightarrow U = L\frac{di}{dt}$ et $i = \frac{1}{L}\int U(t)dt$
Énergie emmagasinée $W = \frac{1}{2}LI^2$ Où L est l'inductance.

Loi d'Ohm pour un dipôle linéaire

- Voltamètre ou moteur : Shéma équivalent



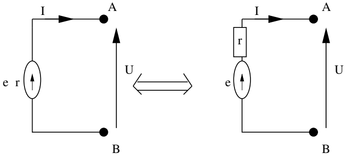
$\Longrightarrow U = e + r \cdot I$

Puissance absorbée $P_a = eI + rI^2 = UI$

N.B. Le sens du courant ne peut être inversé. ($I > 0$)

- Source de tension :

Shéma équivalent

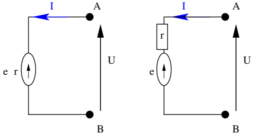


$\Longrightarrow U = e - r \cdot I$

$\Longrightarrow$ Puissance délivrée : $eI = UI + rI^2$

N.B. Il est possible de monter la source de tension en

opposition telle :



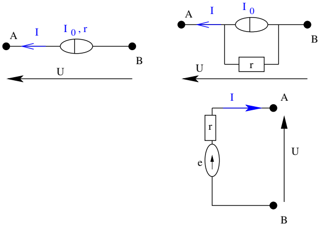
$\Longrightarrow U = e + r \cdot I$

Puissance utile $P_u = eI + rI^2 = UI$

La source de tension fonctionne alors en mode récepteur.

Loi d'Ohm pour un dipôle linéaire

- Source de courant :



$$\Longrightarrow I = I_0 - \frac{U}{r} = I_0 - GU$$

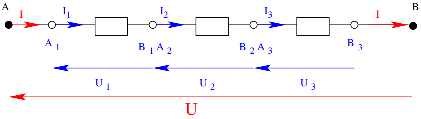
$$\Longrightarrow U = rI_0 - rI = e - rI$$

Puissance Délivrée:

$$UI = UI_0 - GU^2 \quad UI = eI - rI^2$$

Association de dipôles linéaires

1. *Association en série*



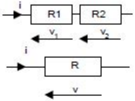
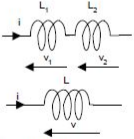
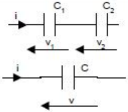
$$U = V_A - V_B$$
$$U = V_{A_1} - V_{B_1} + V_{A_2} - V_{B_2} + V_{A_3} - V_{B_3}$$
$U = U_1 + U_2 + U_3$ "on somme les tensions le long d'un fil"

$I = I_1 = I_2 = I_3$ " le courant est une constante dans un fil"

courant électrique dans un fil $\Leftrightarrow$ eau dans un tuyau !

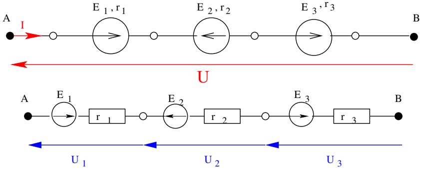
Association de dipôles linéaires

- <u>Cas des résistances, condensateurs et bobines :</u>

		
$v = v_1 + v_2$ $Ri = R_1 i + R_2 i$ $\Rightarrow R = R_1 + R_2$	$v = v_1 + v_2$ $L\frac{di}{dt} = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt}$ $\Rightarrow L = L_1 + L_2$	$v = v_1 + v_2$ $\frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{C_1}\int idt + \frac{1}{C_2}\int idt$ $\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
Généralisation :	Généralisation :	Généralisation :
$R = \sum_i R_i$	$L = \sum_i L_i$	$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Cas des sources de tension :

le sens de I est une hypothèse de travail

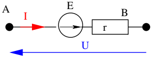
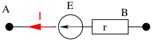
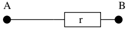


$$U_1 = -E_1 + r_1 I \quad U_2 = +E_2 + r_2 I \quad U_3 = -E_3 + r_3 I$$

$$U = -E + RI$$

$$U = -(E_1 - E_2 \quad +E_3) + (r_1 + r_2 \quad +r_3) I$$

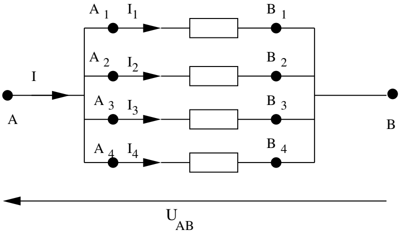
$$\boxed{E = E_1 - E_2 + E_3 \quad , \quad R = r_1 + r_2 + r_3}$$

si $E > 0$		$E_1 + E_3 > E_2$ (E_1,E_3 imposent le sens de I)
si $E < 0$		$E_1 + E_3 < E_2$ (E_2 impose le sens de I)
si $E = 0$		et $E_1 + E_3 = E_2$ (pas de courant)

M.A. Lebeault

2. *Association en parallèle*

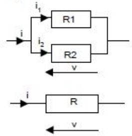
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$



$$U_{AB} = V_A - V_B$$
$$U_{AB} = V_{A_k} - V_{B_k} \quad \forall k$$

$$I = \sum_k I_k$$

- cas de Résistances, Bobines et Condensateurs:



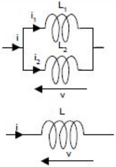
$i = i_1 + i_2$

$\frac{v}{R} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Généralisation :

$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$



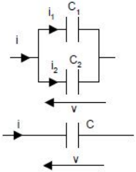
$i = i_1 + i_2$

$\frac{1}{L}\int v dt = \frac{1}{L_1}\int v dt + \frac{1}{L_2}\int v dt$

$\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

Généralisation :

$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}$



$i = i_1 + i_2$

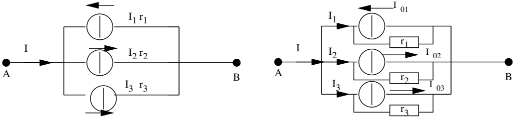
$C\frac{dv}{dt} = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow C = C_1 + C_2$

Généralisation :

$C = \sum_i C_i$

- cas des sources de courant :



Par définition : $I_1 = g_1 U_1 - I_{01}$

$$I_2 = g_2 U_2 + I_{02}$$

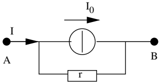
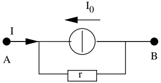
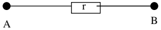
$$I_3 = g_3 U_3 + I_{03}$$

où $U_1 = U_2 = U_3 \quad = U_{AB}$

$$I = \sum_{k=1}^{k=3} I_k = I_{02} + I_{03} - I_{01} + (g_1 + g_2 + g_3)U$$

$$I = I_0 + gU$$

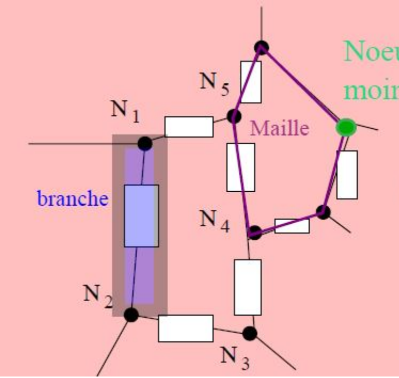
M.A. Lebeault

si $I_0 > 0 \Longrightarrow$		$r = \frac{1}{g} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=3} g_k}$ où $g_k = \frac{1}{r_k}$
si $I_0 < 0 \Longrightarrow$		
si $I_0 = 0 \Longrightarrow$		

Théorêmes généraux

M.A. Lebeault

1. *Définitions*



Soit un réseau linéaire.

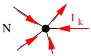
On appelle réseau un ensemble de mailles.

Maille : circuit fermé constitué de branches

Branche : constitue un dipole.

a *Lois de Kirshoff*

1 Loi des noeuds



$$\boxed{\sum_k I_k = 0}$$

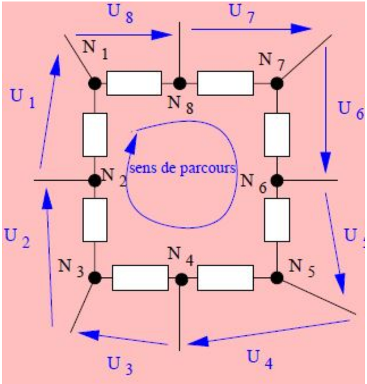
Soit un noeud N commun à n branches.
$I_k \Longrightarrow$ intensité algébrique du courant dans la branche k.
Convention:

$$I_k \Longrightarrow \oplus \text{ si courant entrant}$$
$$I_k \Longrightarrow \ominus \text{ si courant sortant}$$

Ce qui signifie qu'aucune charge ne s'accumule en un noeud !!!

2. Loi des Mailles

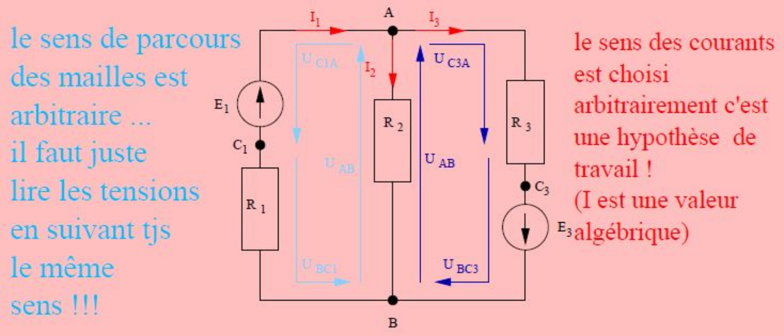
Toujours appliquer le même sens de parcours pour la lecture des tensions dans une maille



$$\boxed{\sum_k U_k = 0}$$

Théorêmes généraux-Lois de Kirshoff

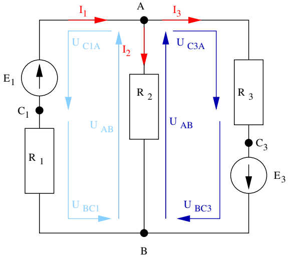
Déterminer les courants dans le Circuit1 suivant:



<u>le sens des courants est choisi</u>

- <u>loi des noeuds:</u> en A : $I_1 - I_2 - I_3 = 0$; en B : $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (A)& (B) identiques.

Théorêmes généraux-Lois de Kirshoff



- <u>loi des mailles :</u>
  - Maille $AC_1BA : U_{AB} + U_{C_1A} + U_{BC_1} = 0$

    $V_A - V_B + V_B - V_{C_1} + V_{C_1} - V_A = 0$

    $R_2 I_2 + R_1 I_1 - E_1 = 0$
  - Maille $AC_3BA : U_{AB} + U_{C_3A} + U_{BC_3} = 0$

    $V_A - V_B + V_B - V_{C_3} + V_{C_3} - V_A = 0$

    $R_2 I_2 + E_3 - R_3 I_3 = 0$
- Il faut donc résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues

Théorêmes généraux-Lois de Kirshoff

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
R_2 I_2 + R_1 I_1 - E_1 &= 0 \\
R_2 I_2 + E_3 - R_3 I_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ par substitution $I_2 = I_1 - I_3$

$$
\begin{aligned}
E_1 - I_1(R_2 + R_1) + R_2 I_3 &= 0 \quad (\mathrm{A}) \\
E_3 + I_1 R_2 - I_3(R_2 + R_3) &= 0 \quad (\mathrm{B})
\end{aligned}
$$

une méthode de résolution est :

$$
\begin{array}{l|l}
\mathrm{A}(R_2) & E_1 R_2 - I_1(R_2 + R_1)R_2 + (R_2)^2 I_3 = 0 \\
+ & \\
\mathrm{B}(R_2 + R_1) & E_3(R_2 + R_1) + I_1 R_2(R_2 + R_1) - I_3(R_2 + R_3)(R_2 + R_1) = \\
\hline
= & E_1 R_2 + E_3(R_2 + R_1) - I_3(R_1 R_3 + R_2(R_3 + R_1)) = 0
\end{array}
$$

Théorêmes généraux-Lois de Kirshoff

On en déduit facilement :

$$I_1 = \frac{(R_2+R_3)E_1+R_2E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{R_3E_1-R_1E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2E_1+(R_1+R_2)E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

- Conclusion: les intensités I_1 et I_3 sont positives cad que le sens a priori choisi est correct.
  Le courant dans la branche AB (I_2) dépend de la différence $I_1 - I_3$:

si $R_3E_1 > R_1E_3$	$I_2 > 0$	sens de I_2 A $\Longrightarrow$ B
si $R_3E_1 < R_1E_3$	$I_2 < 0$	sens de I_2 B $\Longrightarrow$ A

- Application Numérique:

$$E_1 = 10\text{V} \quad E_3 = 5\text{V} \quad R_1 = R_3 = 10\ \Omega$$
$$R_2 = 5\ \Omega$$

Solution

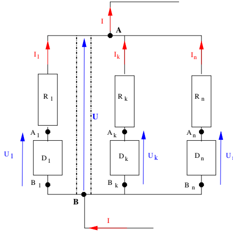
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{150+25}{100+100} = \frac{175}{200} = 0{,}875\ \text{A} \\ I_2 &= \frac{100-50}{100+100} = \frac{50}{200} = 0{,}250\ \text{A} \\ I_3 &= \frac{50+75}{100+100} = \frac{125}{200} = 0{,}625\ \text{A} \end{aligned}$$

On vérifie que $I_1 = I_2 + I_3$ cad le sens des courants inscrit sur le schéma

M.A. Lebeault

b *Théorême de Millmann*

- Soient n branches ayant en commun A et B . Chaque branche est constituée de 2 dipôles montés en série: un résistor - un dipôle $A_k B_k$ tel que : $U_k = V_{A_k} - V_{B_k} = U_{A_k B_k}$.



Le théorême de Millmann est une application de la loi des noeuds généralisée.
$\Longrightarrow$ Loi des noeuds en A: $\sum_{k=1}^{n} I_k - I = 0$

Théorêmes généraux-Millmann

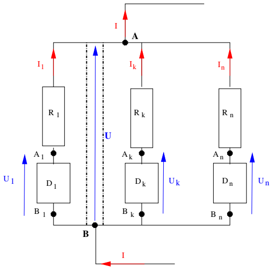
loi des noeuds en A: $\quad U_{AA_k} = V_A - V_{A_k} = -R_k I_k$

avec $G_k = \frac{1}{R_k}$ $\quad I_k = \frac{1}{R_k}(V_{A_k} - V_A) = G_k(V_{A_k} - V_A)$

et $\quad V_{A_k} = U_k + V_{B_k} = U_k + V_B$

d'où $\quad \sum_k G_k(U_k + \overbrace{V_B - V_A}^{-U}) - I = 0$

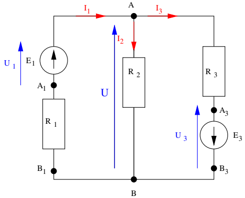
Soit $\quad \left(\sum_k G_k U_k\right) - I = \left(\sum_k G_k\right) U$



$$\boxed{U_{AB} = U = \frac{\left(\sum_k G_k U_k\right) - I}{\sum_k G_k} = \frac{\left(\sum_k \frac{U_k}{R_k}\right) - I}{\sum_k \frac{1}{R_k}}}$$

- Applications:

Circuit 1 : Reprenons le circuit précédemment étudié et appliquons le résultat de Millmann avec : $I=0,\ U_1=E_1,\ U_2=0,\ U_3=-E_3$.



$$U=\frac{G_1E_1-G_3E_3}{G_1+G_2+G_3}=\frac{\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

Or $U=R_2I_2$ donc $I_2=\frac{U}{R_2}=G_2U$:

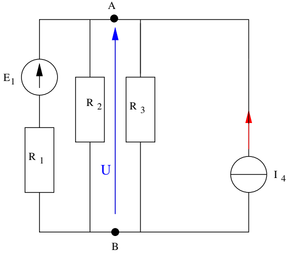
$$I_2=G_2U=G_2\frac{G_1E_1-G_3E_3}{G_1+G_2+G_3}=\frac{1}{R_2}\quad\frac{\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

$$I_2=\frac{\frac{E_1}{R_2R_1}-\frac{E_3}{R_2R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2R_3}=\frac{R_3E_1-R_1E_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

Puis on détermine I_1 et I_3 à partir de

$$U = E_1 - R_1 I_1 = R_3 I_3 - E_3$$

Circuit 2 : Déterminer U dans le circuit suivant :



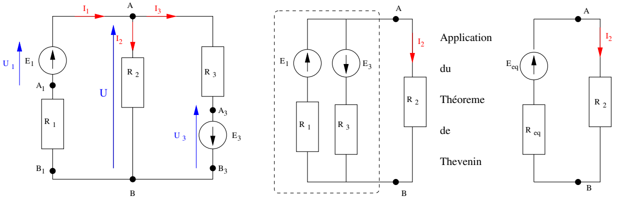
$$U = \frac{\sum_k G_k U_k - I}{\sum_k G_k} = \frac{G_1 E_1 + I_4}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$U = \frac{\sum_k \frac{U_k}{R_k} - I}{\sum_k \frac{1}{R_k}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + I_4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Théorême de Thévenin

Ennoncé : Toute partie de réseau comprise entre 2 noeuds A et B peut être remplacée par une source de tension de f.è.m E_{eq} et de résistance interne R_{eq}.
La Partie considérée étant déconnectée du reste du réseau :
$\cdot E_{eq} = V_A - V_B = U_{AB}$
$\cdot R_{eq}$ est la résistance équivalente du circuit lorsque toutes les sources sont éteintes.

- Application n°1 : On reprend le Circuit 1

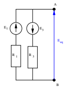


Le réseau se réduit à une seule maille !

$$R_2 I_2 - E_{eq} + R_{eq} I_2 = 0 \qquad I_2 = \frac{E_{eq}}{R_2 + R_{eq}}$$

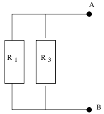
Théorêmes généraux-Thévenin

- Détermination de $E_{eq} \Longrightarrow$ théorême de Millmann :



$$E_{eq} = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{G_1 + G_3}$$

- détermination de $R_{eq} \Longrightarrow R_1 // R_3$



$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1 + G_3}$$

- D'où la valeur de I_2:

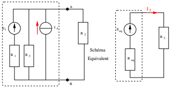
$$I_2 = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{\left(\frac{1}{G_1+G_3} + R_2\right)(G_1 + G_3)} = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{1 + R_2(G_1 + G_3)}$$

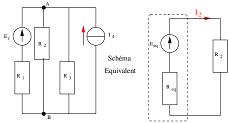
On retrouve le résultat déjà obtenu :

$$I_2 = \frac{1}{R_2} \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{G_2 + G_1 + G_3} = \frac{R_3 E_1 - R_1 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Théorêmes généraux-Thévenin

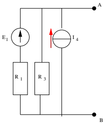
- Application n°2 : on reprend le Circuit 2





$$I_2 = \frac{E_{eq}}{R_2+R_{eq}}$$

  - Détermination de $E_{eq} \Longrightarrow$ théorême de Millmann :



$$E_{eq} = \frac{G_1 E_1 + I_4}{G_1+G_3}$$

  - détermination de $R_{eq} \Longrightarrow (R_1//R_3)\ R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1+G_3}$
  - On retrouve I_2

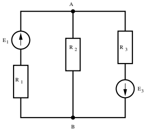
$$\Longrightarrow I_2 = \frac{G_1 E_1 + I_4}{(G_1+G_3)(R_2+\frac{1}{G_1+G_3})} = \frac{G_1 E_1 + I_4}{1+R_2(G_1+G_3)} = \frac{G_2(G_1 E_1 + I_4)}{G_2+G_1+G_3}$$

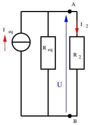
d *Théorême de Norton*

Énoncé: Toute partie de réseau comprise entre 2 noeuds A et B peut être remplacée par une source de courant d'intensité I_{eq} et de résistance interne R_{eq}.
La partie considérée étant déconnectée
$\cdot I_{eq}$ est l'intensité du courant traversant un fil conducteur de résistance nulle (court-circuit) reliant A et B.
$\cdot R_{eq}$ est la résistance équivalente lorsque toutes les sources sont éteintes.

Théorêmes généraux- Norton

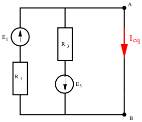
- Application n°1 : circuit 1





$$I_2 = I_{eq} - G_{eq} U \qquad \text{avec } U = R_2 I_2$$
$$I_2(1 + R_2 G_{eq}) = I_{eq} \qquad \Longrightarrow I_2 = \frac{I_{eq}}{1+R_2 G_{eq}}$$

- Détermination de I_{eq} $\Longrightarrow$ Théorême de Millmann :



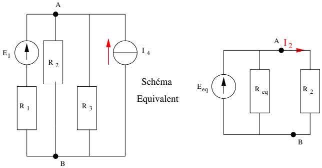
$$U = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3 - I_e q}{G_1 + G_3} = 0 \qquad I_{eq} = G_1 E_1 - G_3 E_3$$

- Détermination de R_{eq} idem Thevenin $\Longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{G_1 + G_3}$
- d'où la valeur de I_2 :

$$I_2 = \frac{G_1 E_1 - G_3 E_3}{1 + R_2(G_1 + G_3)} = \frac{R_3 E_1 - R_1 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

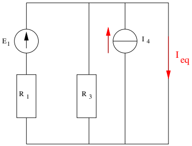
Théorêmes généraux- Norton

- Application n°2 : circuit 2



$$I_2 = \frac{I_{eq}}{1+R_2 G_{eq}}$$

- Détermination de I_{eq} $\Longrightarrow$ Théorême de Millmann :



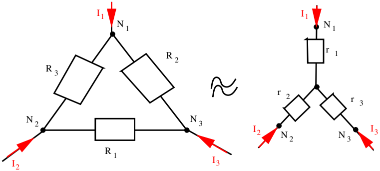
$$\frac{G_1 E_1 + I_4 - I_{eq}}{G_1 + G_3} = 0 \quad I_{eq} = G_1 E_1 + I_4$$

- Détermination de R_{eq} idem Thevenin
- On déduit I_2

$$I_2 = \frac{G_1 E_1 + I_4}{1 + R_2 G_{eq}} = \frac{G_2 (G_1 E_1 + I_4)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Théorêmes généraux- Kenelly

- e *Théorême de Kenelly : équivalence étoile-triangle*



L'équivalence doit être réalisée quelles que soient les intensités I_1, I_2 et I_3. En particulier on a :

si $I_3 = 0$	$I_2 = -I_1$	
	étoile $\Longrightarrow$ Millmann	$V_{N_1} - V_{N_2} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} I_1$
	triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_1} - V_{N_2} = (r_1 + r_2) I_1$

Donc on a

$$(r_1 + r_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (A)$$

Théorêmes généraux- Kenelly

de même on a :

pour $I_2 = 0$	$I_3 = -I_1$	
	étoile $\Longrightarrow$ Millmann	$V_{N_1} - V_{N_3} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} I_1$
	triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_1} - V_{N_3} = (r_1 + r_3) I_1$

Donc on a

$$(r_1 + r_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (B)$$

pour $I_1 = 0$	$I_3 = -I_2$	
	étoile $\Longrightarrow$ Millmann	$V_{N_2} - V_{N_3} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} I_2$
	triangle $\Longrightarrow$	$V_{N_2} - V_{N_3} = (r_2 + r_3) I_2$

Théorèmes généraux- Kenelly

Donc on a

$$(r_2 + r_3) = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (C)$$

3 équations 3 inconnues !!!
$(A) + (B) - (C) = 2r_1$ On déduit alors

$$2r_1 = 2\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

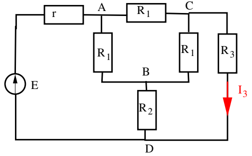
Soit en utilisant les permutations:

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

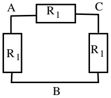
$$r_3 = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

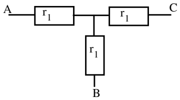
Théorêmes généraux- Kenelly

- Application : Déterminer la valeur du courant I_3 dans le circuit 3:



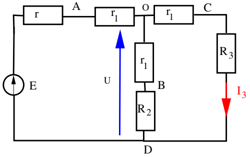
On remplace le triangle (ACB) par un schéma étoile:





avec

$r_1 = \frac{R_1}{3}$ D'où le circuit :



Théorêmes généraux- Kenelly

M.A. Lebeault

- On applique alors le théorême de Millmann pour déterminer U:

$$V_o - V_D = U = \frac{\frac{E}{r+r_1}}{\frac{1}{r+r_1} + \frac{1}{r_1+R_2} + \frac{1}{r_1+R_3}} = (r_1 + R_3)I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{r_1 + R_3} \frac{E}{1 + \frac{r+r_1}{r_1+R_2} + \frac{r+r_1}{r_1+R_3}}$$

$$I_3 = \frac{E}{2r_1 + R_3 + r + \frac{(r+r_1)(r_1+R_3)}{r_1+R_2}}$$