

Chapitre I : Intensité-Loi d'Ohm-Effet Joule

M.A.
Lebeault

Plan

- 1 Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$
 - Intensité d'un faisceau de particules
 - Vecteur densité de courant $\vec{j}$
- 2 Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux
 - Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur
 - Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité
 - Loi d'Ohm macroscopique
 - Loi de Joule
 - Puissance Joule
 - Coexistence de plusieurs types de charge

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

I. Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
microscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

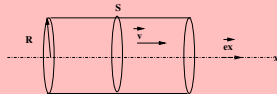
Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

① Intensité d'un faisceau de particules

Soit un faisceau cylindrique de particules de charge q .



Hypothèses :

- Distribution homogène des charges: densité volumique de particules $n = \text{cste}$.
- Faisceau monocinétique $\vec{v} = v\vec{e}_x$
- Sur l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ le nombre de particules qui traversent la section **S** est : $\Delta N = vdt \times S \times n$
Ce qui permet de déduire la quantité de charge :

$$\Delta Q = q\Delta N = qns vdt$$

Définition : L'intensité du faisceau est : $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qns v$ quantité de charge traversant la section **S** pendant l'unité de temps.

I. Intensité - vecteur densité de courant $\vec{j}$

M.A.
Lebeault

② Vecteur densité de courant $\vec{j}$ (ici : densité surfacique)

Définition : $\vec{j} = nq\vec{v}$ avec le module $j = \|\vec{j}\| = n|q|v$ d'où

$$I = \vec{j} \cdot S\vec{e}_x$$

Par convention le sens du courant est le sens de déplacement des charges positives.

$q > 0 \quad I > 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de même sens	$[I] = A$ (Ampère)
$q < 0 \quad I < 0$	$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de sens opposé	$[j] = Am^{-2}$

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

Trois hypothèses :

- 1 Les porteurs de charges sont les e^- libres de densité particulaire n
- 2 En présence de $\vec{E}$, champ électrique créé par la d.d.p. (différence de potentiel) appliquée aux bornes du conducteur, ces e^- sont animés d'une vitesse moyenne $\vec{v}(t) \Rightarrow$ Le conducteur est le siège d'un courant caractérisé par le vecteur densité de courant $\vec{j}(t) = -nev(t)$. $e \sim 1,6 \times 10^{-19} C$
- 3 Les collisions subies par les e^- de conduction en traversant le conducteur $\iff$ à une force de frottement appliquée à chacun des e^- .

$$\vec{f}(t) = -k\vec{v}(t) \quad k > 0 \quad (k: \text{constante caractéristique du métal})$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

① Équations différentielles du mouvement d'un électron dans le conducteur

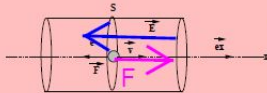
Remarque:

$$m_{e^-} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg soit } \|P\| = mg = 9 \times 10^{-30} \text{ N}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \text{ soit } \|F\| = qE = 1,6 \times 10^{-16} \text{ N}$$

$$(E = \frac{ddp}{d} = \frac{220V}{22cm} = 1000V/m)$$

$\vec{P} \Rightarrow$ négligeable par rapport à $\vec{F}$.



rmq : E est parallèle à l'axe x (impose le sens de déplacement)

Relation Fondamentale de la Dynamique: $m \vec{a} = \underbrace{-e\vec{E}}_{F_{elec}} \underbrace{-k\vec{v}(t)}_{F_{frottement}}$

$$\vec{a}(t) + \frac{k}{m} \vec{v}(t) = \frac{-e}{m} \vec{E}$$

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale

- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

Équation différentielle vectorielle du mouvement d'un e^- .

$$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e}_x + \frac{k}{m} \overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e}_x = \frac{-e}{m} E \implies \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_x(t) = -\frac{e}{m} E \quad (1)$$

$$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e}_y + \frac{k}{m} \overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e}_y = 0 \implies \frac{dv_y(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_y(t) = 0 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{a(t)} \cdot \vec{e}_z + \frac{k}{m} \overrightarrow{v(t)} \cdot \vec{e}_z = 0 \implies \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{k}{m} v_z(t) = 0 \quad (3)$$

$\implies$ 3 équations différentielles à résoudre :

solution de (2) & (3) (maths):

avec $[\ln(f(t))]' = \frac{d \ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$ où $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ donc

$$f'(t) + af(t) = 0 \rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -a \xrightarrow{\text{primitive}} \ln(f(t)) = -at + \underbrace{\ln(f_0)}_{\text{cste}}$$

$$\ln \frac{f(t)}{f_0} = -at \xrightarrow{\text{exponentiation}} f(t) = f_0 e^{-at}$$

$$v_y = A_y \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \quad v_z = A_z \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

Remarque:

Avant $t = 0$ (date d'application de $\vec{E}$) toutes les directions de vitesses sont équiprobables.

$\Rightarrow v_y = v_z = 0$. En effet il n'y a pas d' e^- qui sort d'un conducteur non soumis à une ddp.

$\Rightarrow A_y = A_z = 0$.

Résolution de (1):

- Solution générale: $v_x = -\frac{eE}{k} + A_x \exp(-\frac{k}{m}t)$
- conditions initiales:
à $t = 0$ $v_x = v_y = v_z = 0 \Rightarrow A_x = e\frac{E}{k}$
- Solution complète:
 $v_x(t) = e\frac{E}{k}[\exp(-\frac{k}{m}t) - 1]$. On pose $\tau = \frac{m}{k}$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{e}{k} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})] \vec{E}$$

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

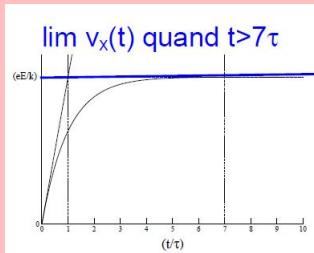
Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule



$\exp(-\frac{t}{\tau}) \ll 1$ et $\exp(-7) = 910^{-4}$ pour $t > 7\tau$. Il y a donc établissement d'une vitesse constante uniforme $\vec{v}_0$, cad d'un régime permanent. Les e^- ont un mvt rectiligne uniforme à l'intérieur du conducteur selon la direction du champ appliqué. On peut alors définir une nouvelle quantité : **la mobilité de l'électron dans le conducteur μ_e** .

$$\Rightarrow \vec{v}_0 = -\frac{e}{k} \vec{E} = \mu_e \vec{E}$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

$$\vec{v}_0 = -\frac{e}{k}\vec{E} = \mu_e\vec{E} \text{ telle que } \mu_e < 0 \text{ et } [\mu_e] = m^2 s^{-1} V^{-1}$$

② *Loi d'Ohm locale - Conductivité - Résistivité*

Pour l'ensemble des électrons:

$\vec{j}$ devient $\Rightarrow \vec{j} = -ne\vec{v}_0 = \frac{ne^2}{k}\vec{E}$ est donc dirigée selon $\vec{E}$.

C'est la loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ avec $\gamma = \frac{ne^2}{k}$

- tel que $\gamma > 0$ et $[\gamma] = \Omega^{-1} m^{-1}$. γ est appelée conductivité du conducteur.
- On définit ρ la résistivité du conducteur par $\rho = \frac{1}{\gamma}$

$\rho = \frac{k}{ne^2} \Rightarrow$ est proportionnelle à k , cad à la résistance au mvt des e^- dans le conducteur exercée par le milieu extérieur.

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

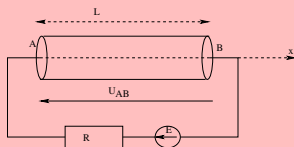
Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

③ Loi d'Ohm macroscopique



$$U_{AB} = V_A - V_B \text{ et } \vec{E} = \frac{U}{L} \vec{e}_x \text{ où } I = \vec{J} \cdot S \vec{e}_x = \gamma \vec{E} \cdot S \vec{e}_x = \gamma \frac{S}{L} U$$

$$U = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} I = RI$$

avec $R = \frac{L}{\gamma S}$ résistance du conducteur exprimée en Ω

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

④ Loi de Joule

① Puissance Joule

Lorsque le régime permanent est établi alors : (permanent $\rightarrow$ indépendant de t , par définition $a(t) = 0$)

$$\vec{f} = -k\vec{v}_0 = -k\frac{-e}{k}\vec{E} = e\vec{E} \quad \text{les 2 forces se compensent}$$

Le travail de $\vec{f}$ pendant $[t, t + dt]$ est :

$$W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_0 \Delta t = e\vec{E} \cdot \left(\frac{-e}{k}\right)\vec{E} \Delta t = -\frac{e^2 E^2}{k} \Delta t$$

$$W(\vec{f}) = -\frac{e^2 U^2}{kL^2} \Delta t \quad \text{travail de la force de frottement pour 1 } e^-$$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Pour l'ensemble des e^- contenus dans le volume $V = SL$, l'énergie dissipée par "frottement" est :

$$\Delta W = \left(-\frac{e^2 U^2}{kL^2} \Delta t \right) \times nSL = - \underbrace{\left(n \frac{e^2}{k} \right)}_{\gamma} \underbrace{\left(\frac{S}{L} \right)}_{\frac{1}{R\gamma}} U^2 \Delta t$$

Or $\gamma = \frac{ne^2}{k}$ et $R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} \implies R\gamma = \frac{L}{S}$
 $\implies \Delta W = -\frac{\gamma U^2}{R\gamma} \Delta t$ avec $U = RI$

$$\implies \Delta W = RI^2 \Delta t$$

ce qui conduit à l'expression de la puissance dissipée :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = RI^2 \text{ Puissance Joule}$$

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance, Joule

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance Joule

ii Coexistence de plusieurs types de charge

Plusieurs type de charges positives ou négatives sont susceptibles d'être mobiles. Elles sont caractérisées par :

- n_i : densité des particules i
- v_i : vitesse des particules i en régime permanent
- q_i : charge des particules i

Soit $\vec{E} = E\vec{e}_x$ le champ uniforme qui règne à l'intérieur du conducteur.

$$\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$$

$\mu_i > 0$ si charge $q_i > 0$

$\mu_i < 0$ si charge $q_i < 0$

II. Modèle microscopique de la conduction électrique dans les métaux

M.A.
Lebeault

Intensité -
vecteur
densité de
courant $\vec{j}$

Intensité d'un
faisceau de
particules

Vecteur densité
de courant $\vec{j}$

Modèle mi-
croscopique
de la
conduction
électrique
dans les
métaux

Équations
différentielles du
mouvement d'un
électron dans le
conducteur

Loi d'Ohm locale
- Conductivité -
Résistivité

Loi d'Ohm
macroscopique

Loi de Joule

Puissance, Joule

Le vecteur densité de courant total est alors :

$$\vec{j} = n_1 q_1 \vec{v}_1 + n_2 q_2 \vec{v}_2 + \dots + n_i q_i \vec{v}_i + \dots$$

$$\vec{j} = [n_1 q_1 \mu_1 + n_2 q_2 \mu_2 + \dots] \vec{E}$$

$$\vec{j} = \left(\sum_{i=1}^N n_i q_i \mu_i \right) \vec{E}$$

La conductivité totale du milieu est

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \implies \gamma = \sum_{i=1}^N n_i q_i \mu_i$$

- Remarque: $q_i \mu_i > 0$ toujours vrai car q_i et μ_i de même signe $\implies \gamma$ est toujours POSITIF.