Correction des exercices sur le chapitre estimation - intervalles de confiance

C. Bardel

Septembre 2025

Exercice (diapo 26)

Énoncé

On suppose que la glycémie des individus d'une population donnée est distribuée normalement, avec une moyenne de 1.00 g/L et un écart type de 0.03 g/L. On considère un échantillon de 100 personnes issues de cette population.

1. La probabilité que la glycémie d'une personne soit supérieure à 1.03 g/L est inférieure à $2 \cdot 10^{-5}$
2. La probabilité pour que la glycémie moyenne soit supérieure à 1.03 g/L est inférieure à $2 \cdot 10^{-5}$
3. L'intervalle de fluctuation au risque 5 % de la glycémie moyenne est : $[0.94; 1.06]$
4. L'intervalle de fluctuation au risque 5 % de la glycémie est : $[0.94; 1.06]$
5. Quand on donne un IF, on majore la borne supérieure et on minore la borne inférieure

Correction

Soit X la va modélisant la glycémie d'un individu. $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma = 0.03$

1. proposition 1 :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{P}(X \geq 1.03) & = & \mathsf{P}\big(\frac{X-1}{0.03} \geq \frac{1.03-1}{0.03}\big) \text{ Centrage et réduction} \\ & = & \mathsf{P}(Z \geq 1) \\ & = & 1 - \mathsf{P}(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) \end{array}$$

On lit $\Phi(1)$ dans la table de la fonction de répartition : $\Phi(1) = 0.8413$

$$\mathsf{P}(X \geq 1.03) \simeq 0.16 \quad \text{Proposition fausse}$$

2. proposition 2 :
On définit la va M : « glycémie moyenne »
$M = \displaystyle\sum_{i=1}^{100} \frac{X_i}{n}$; $M \to \mathcal{N}(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ (combinaison linéaire de variables aléatoires qui suivent une loi normale)
En utilisant les valeurs numériques : $M \to \mathcal{N}(1; 3 \times 10^{-3})$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{P}(M \geq 1.03) & = & \mathsf{P}\left(\frac{M-1}{3\times10^{-3}} \geq \frac{1.03-1}{3\times10^{-3}}\right) \\ & = & \mathsf{P}(Z \geq 10) = 1 - \mathsf{P}(Z \leq 10) \\ & = & 1 - \Phi(10) \end{array}$$

$\Phi(10)$ n'est pas dans la table de la fonction de répartition, mais on sait que $\Phi(10) \geq \Phi(4.9)$. Or $\Phi(4.9) = 0.99998$

$$\mathsf{P}(M \geq 1.03) \leq 2 \times 10^{-5} \quad \text{Proposition vraie}$$

3. proposition 3 :
   On calcule un intervalle de confiance à 95% ($\alpha = 0.05$). On va donc lire la valeur $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975}$ dans la table 2 :

   $$z_{0.975} = 1.96$$
   $$IF_{0.95}(M) = \left[\mu - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$
   $$IF_{0.95}(M) = [0.994; 1.006] \quad \text{proposition fausse}$$

   Rappel : pour garantir le niveau de confiance, on majore la borne supérieure et on minore la borne inférieure.
4. proposition 4 :
   L'intervalle de fluctuation de X se calcule de la même façon que celui de M. On trouve :
   $$IF_{0.95}(X) = [\mu - 1.96\sigma; \mu + 1.96\sigma]$$
   $$IF_{0.95}(X) = [0.94; 1.06] \quad \text{proposition vraie}$$
5. proposition 5 : vraie