

Probabilités - Probabilités conditionnelles

Variables aléatoires et lois classiques

C. Bardel

PASS
Septembre 2025

Plan du cours

Probabilités

Expérience aléatoire et événements

Probabilité

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Variables aléatoires

Lois classiques

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Expérience

- ▶ qui peut être **répété**
- ▶ qui a **plusieurs** résultats possibles
- ▶ dont le résultat est **imprévisible**

Exemples :

- ▶ lancé d'un dé à 6 faces
- ▶ observation du statut maladie d'un individu

Expérience aléatoire

Expérience aléatoire

Expérience

- ▶ qui peut être **répété**
- ▶ qui a **plusieurs** résultats possibles
- ▶ dont le résultat est **imprévisible**

Exemples :

- ▶ lancé d'un dé à 6 faces
- ▶ observation du statut maladie d'un individu

Évènement élémentaire

- ▶ **Résultat** d'une expérience aléatoire

Exemples :

- ▶ « Obtenir 3 lors du lancé d'un dé à 6 faces »
- ▶ « Être malade »

Ensemble fondamental = univers

Définition

- ▶ Ensemble de **tous les résultats possibles** (événements élémentaires) d'une expérience aléatoire
- ▶ Noté Ω (ou S)

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Propriété

Ω peut être :

- ▶ un ensemble **fini**
Exemple : statut vis à vis de la maladie, $\Omega = \{ "M", "Non M" \}$
- ▶ un ensemble **infini dénombrable**
Exemple : nombre de lancers avant d'obtenir face, $\Omega = \{1, 2, \dots\}$
- ▶ un ensemble **infini indénombrable**
Exemple : mesure du taux de cholestérol sanguin

Ω **discret** : Ω fini ou infini dénombrable

Ω **continu** : Ω infini indénombrable

Évènement (non élémentaire)

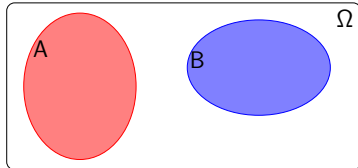
Définition d'un évènement (non élémentaire)

- un *sous-ensemble* de Ω

Exemple : évènement A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 lors du lancé d'un dé à 6 faces »

$$A = \{5, 6\}$$

Représentation ensembliste

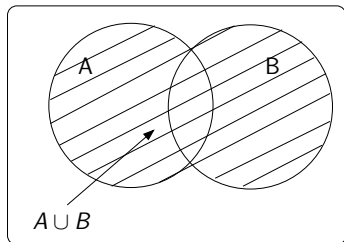


Évènements particuliers

- L'évènement total Ω est **certain** :
- L'ensemble vide $\emptyset$ est un évènement **impossible**

Opérations sur les évènements

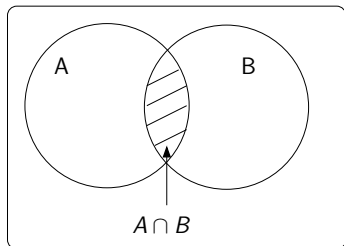
Union



Notation : $(A \cup B)$ ou $(A \text{ ou } B)$

Définition : l'événement $A \cup B$ est réalisé dès que A ou B est réalisé

Intersection

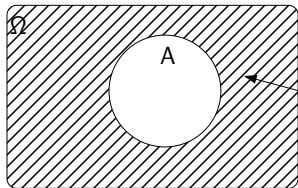


Notation : $(A \cap B)$ ou $(A \text{ et } B)$
ou (A, B)

Définition : l'événement $A \cap B$ est réalisé dès que A et B sont réalisés dans la même expérience

Opérations sur les ensembles (2)

Complémentaire de A



Notation : $C(A)$ ou $\bar{A}$ ou (non A)

Définition : l'événement complémentaire de A contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A

Complémentaire de $(A \cap B)$ et de $(A \cup B)$

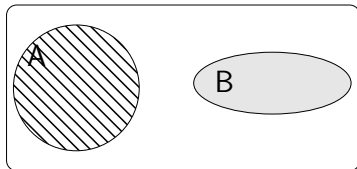
► $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

► $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Définitions

Évènements incompatibles

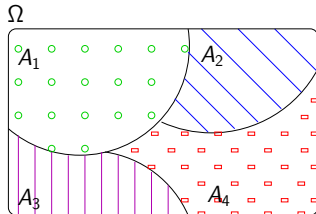
A et B sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$



Système complet d'évènements

On appelle *système complet d'évènements* toute partition de Ω , c'est à dire tout ensemble d'évènement (A_i) tel que :

- ▶ $\forall i, A_i \neq \emptyset$
- ▶ $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
(évènements 2 à 2 incompatibles)
- ▶ $\bigcup_i A_i = \Omega$



Exemple

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces

Évènement A : « Obtenir un résultat pair », $A = \{2; 4; 6\}$

Évènement B : « Obtenir un résultat ≥ 3 », $B = \{3; 4; 5; 6\}$

Évènement C : « Obtenir 5 », $C = \{5\}$

Évènement D : « Obtenir un résultat impair », $D = \{1; 3; 5\}$

- ▶ $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- ▶ **Union** : $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
- ▶ **Intersection** : $A \cap B = \{4; 6\}$
- ▶ **Complémentaire** de B : $\overline{B} = \{1; 2\}$
- ▶ $A \cap C = \emptyset$, A et C sont **incompatibles** (ou s'excluent mutuellement)
- ▶ A et D forment un **système complet d'évènements**
 - ▶ $A \neq \emptyset$ et $D \neq \emptyset$
 - ▶ $A \cap D = \emptyset$
 - ▶ $A \cup D = \Omega$

Probabilité

Définition

On appelle **probabilité** sur Ω , une application P qui à tout événement A de Ω , associe un réel $P(A)$ **positif ou nul** tel que

- ▶ $P(\Omega) = 1$
- ▶ Si A et B sont **incompatibles** alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilité et fréquence

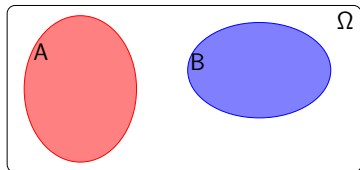
Exemple : croisement entre plantes hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte (a = allèle muté, récessif)

	Effectif n=50		Effectif n=1000		
Phénotype	Effectifs	Fréq.	Effectifs	Fréq.	Proba th.
sauvage	36	0,72	755	0,755	0,75
muté	14	0,28	245	0,245	0,25

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la fréquence relative tend vers la probabilité (loi des grands nombres)

Propriétés

Illustration



$$P(A) = \frac{\text{Surface de } A}{\text{Surface de } \Omega}$$

$$P(\Omega) = 1 \text{ (définition)} \quad P(\emptyset) = 0$$

Propriétés

► $P(A) \leq 1$

► Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n évènements **incompatibles** 2 à 2 alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

► $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

► Pour 2 évènements A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité sur un ensemble Ω fini

Cas général

Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, pour définir une probabilité sur Ω il suffit de se donner n *nombre*s réels p_i tels que

► $\forall i, p_i \geq 0$

► $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Les p_i sont les probabilités des évènements élémentaires $\{\omega_i\}$

Probabilité d'un évènement A quelconque

La probabilité d'un évènement A quelconque est la **somme des probabilités** des évènements élémentaires qui constituent A

Probabilité sur un ensemble Ω fini (2)

Cas particulier de l'équiprobabilité

Cas où tous les évènements élémentaires ont la **même probabilité**

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, les probabilités des évènements élémentaires sont $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$

La probabilité d'un évènement A quelconque s'écrit alors

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles de l'ensemble } \Omega}$$

Les calculs de proba se ramènent à des problèmes de **dénombrement**

Probabilité sur un ensemble Ω fini (2)

Cas particulier de l'équiprobabilité

Cas où tous les évènements élémentaires ont la **même probabilité**

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, les probabilités des évènements élémentaires sont $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$

La probabilité d'un évènement A quelconque s'écrit alors

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles de l'ensemble } \Omega}$$

Les calculs de proba se ramènent à des problèmes de **dénombrement**

Exemple : lancé d'un dé à 6 faces

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$A = \text{« Obtenir un résultat strictement inférieur à 3 »} = \{1; 2\}$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Plan du cours

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Définition

Formules des probabilités composées, des probabilités totales et
formule de Bayes

Indépendance

Variables aléatoires

Lois classiques

Définition

Définition

Soit B un évènement de probabilité non nulle

Pour tout évènement A , on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé** le réel $P(A|B)$ défini par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

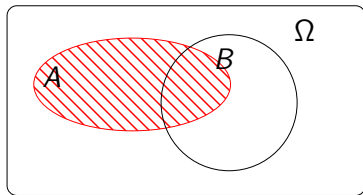
Notation : $P(A|B)$ ou $P_B(A)$

Exemples

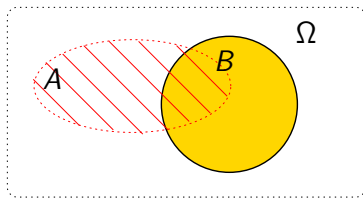
- ▶ Probabilité, pour un fumeur (B), de développer un cancer du poumon (A)
- ▶ Probabilité d'avoir la maladie d'Alzheimer (A) sachant que l'individu porte l'allèle *apoE4* (B) $\Rightarrow$ Notion de **pénétrance** : $P(M|\text{genotype})$
- ▶ Sensibilité, spécificité d'un test diagnostique, VPP, VPN (cf cours)

Représentation graphique et propriétés

Représentation graphique



$$P(A)$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriétés

P_B vérifie toutes les propriétés des probabilités, en particulier

- ▶ $P(\Omega|B) = 1$ et $P(\emptyset|B) = 0$
- ▶ $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- ▶ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

Remarques fondamentales

Quelques sources d'erreur classiques

- ▶ $A|B$ n'est pas un évènement
Il n'existe pas d'évènements conditionnels !
- ▶ $P(A|B) \neq P(B|A)$ (écrit autrement : $P_B(A) \neq P_A(B)$)
- ▶ Ne pas confondre $P(A|B)$ et $P(A \cap B)$

Formules des probabilités composées : probabilité de l'intersection d'évènements

Cas de 2 évènements A et B

De la définition des probabilités conditionnelles, on déduit

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

De même $P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A)$

Or, $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$\text{Donc } P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

Généralisation à n évènements

Soient n évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \\ \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales

Cas simple : partition de Ω en 2

A et $\bar{A}$ forment un *système complet d'évènements*.

Pour tout évènement B :

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

Formule des probabilités totales

Cas simple : partition de Ω en 2

A et $\bar{A}$ forment un *système complet d'évènements*.

Pour tout évènement B :

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

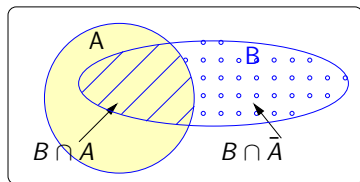
Démonstration (à retenir) :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A})$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$(B \cap A)$ et $(B \cap \bar{A})$ sont incompatibles

donc $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$



On applique la formule des probabilités composées et on obtient

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

Formule des probabilités totales (2)

Généralisation : partition de Ω en n

Si $\{A_1; A_2; \dots; A_n\}$ forment un système complet d'évènements, alors pour tout évènement B , on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$$

La démonstration se fait de la même façon que dans le cas simple

Le théorème de Bayes

Principe

Exprimer $P(A_j|B)$ en fonction des $P(B|A_i)$ et de $P(A_i)$

Exemple d'application : les tests diagnostiques

Connaissant la prévalence d'une maladie $[P(M)]$ et la probabilité qu'un test diagnostique soit positif chez les malades $[P(T^+|M)]$ et chez les individus sains $[P(T^+|\overline{M})]$, calculer la probabilité qu'un individu soit malade si son test est positif $[P(M|T^+) = \text{VPP}]$

Énoncé du théorème dans le cas général

Soient $\{A_1; A_2; \dots; A_n\}$ un système complet d'évènements et B un évènement de probabilité non nulle. Pour tout $j \in \{1; 2; \dots; n\}$, on a :

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \times P(B|A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B|A_i)}$$

Le théorème de Bayes (2)

Démonstration (cas simple)

Soient A et $\bar{A}$ un système complet d'évènements.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{définition d'une proba conditionnelle})$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)} \quad (\text{numérateur : formule des probas composées})$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})} \quad \begin{array}{l} (\text{dénominateur : formule} \\ \text{des probas totales}) \end{array}$$

Plan du cours

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Définition

Variables aléatoires

Lois classiques

Indépendance de 2 évènements

Définition 1

2 évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** (relativement à la probabilité P) ssi

$$P(A|B) = P(A)$$

On a alors de la même façon $P(B|A) = P(B)$

La réalisation d'un des évènements n'a **pas d'influence** sur la probabilité de réalisation de l'autre évènement

Définition 2

A et B sont indépendants (relativement à la probabilité P) ssi

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Théorème

A et B indépendants $\Leftrightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow \overline{A}$ et B indépendants
 $\Leftrightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Indépendance et incompatibilité

Deux notions différentes

- ▶ A et B **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$
Ne fait pas intervenir la probabilité
- ▶ A et B **indépendants** : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

2 évènements de probabilité non nulle incompatibles sont-ils indépendants ?

A et B **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$

Or, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, donc $P(A) \times P(B) \neq 0$

Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

A et B ne sont **pas indépendants**

Indépendance de n évènements (1)

Indépendance 2 à 2

$(A_1; A_2; \dots; A_n)$ sont **indépendants 2 à 2** ssi

$\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ et $\forall j \in \{1; 2; \dots; n\}$, pour $i \neq j$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

Exemple : cas de 3 évènements

A , B et C sont 2 à 2 indépendants ssi

- ▶ $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
- ▶ et $P(A \cap C) = P(A) P(C)$
- ▶ et $P(B \cap C) = P(B) P(C)$

Indépendance de n évènements (2)

Indépendance mutuelle

$(A_1; A_2; \dots; A_n)$ sont **mutuellement indépendants** ssi

$$\forall J \subset \{1; 2; \dots; n\}, P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Exemple : cas de 3 évènements

Exemple : A , B et C sont mutuellement indépendants ssi

- ▶ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ▶ et $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- ▶ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- ▶ et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Épreuves indépendantes (1)

Définition

On parlera d'épreuves **indépendantes** lorsque le résultat d'une des épreuves n'a aucune influence sur les résultats des autres épreuves

Application en statistique

Constitution de n-échantillons (cf cours "Estimation et intervalle de confiance")

Exemple : réalisation de 5 lancés d'une pièce équilibrée

F_i : « Obtenir face au i-ème lancé »

Probabilité p d'obtenir 5 fois face : $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5)$

Les 5 lancés sont indépendants :

$$p = P(F_1) P(F_2) P(F_3) P(F_4) P(F_5)$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Exemple de QCM (CC 2023/2024)

Énoncé

Soit M l'évènement « être malade » et G l'évènement « avoir le génotype CC au niveau d'un SNP ». Parmi les propositions ci-dessous relatives aux probabilités, cochez celle(s) qui est/sont vraie(s)

- A. $P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)}$
- B. $P(M \cap G) = P(M) + P(G) - P(M \cup G)$
- C. si M et G sont indépendants, alors $P(M|G) = P(M)$
- D. l'évènement $(M|G)$ est un évènement conditionnel
- E. si M et G sont incompatibles alors $P(M \cap G) = 0$

Exemple de QCM (CC 2023/2024)

Énoncé

Soit M l'évènement « être malade » et G l'évènement « avoir le génotype CC au niveau d'un SNP ». Parmi les propositions ci-dessous relatives aux probabilités, cochez celle(s) qui est/sont vraie(s)

- A. $P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)}$
- B. $P(M \cap G) = P(M) + P(G) - P(M \cup G)$
- C. si M et G sont indépendants, alors $P(M|G) = P(M)$
- D. l'évènement $(M|G)$ est un évènement conditionnel
- E. si M et G sont incompatibles alors $P(M \cap G) = 0$

Réponse

B-C-E

Plan du cours

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Variables aléatoires

- Loi de probabilité - fonction de répartition

- Espérance et variance

- Variables aléatoires indépendantes

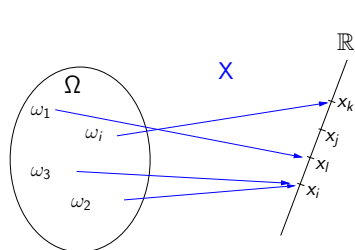
Lois classiques

Variable aléatoire : introduction

Introduction

Soit Ω l'ensemble fondamental des résultats d'une expérience aléatoire. L'attribution d'un nombre à chaque résultat de l'expérience permet de définir une **variable aléatoire**.

Illustration



- ▶ À chaque événement élémentaire ω correspond un nombre réel x .
- ▶ x = réalisation de la variable X pour l'événement ω
- ▶ Attention, il n'y a pas forcément autant de valeurs possibles x que d'événements élémentaires (ex. 3)

Remarque

Une va est une variable **quantitative**

Variable aléatoire : exemples

Exemple 1 : lancé d'un dé à 6 faces

- ▶ Expérience aléatoire : lancé d'un dé à 6 faces
- ▶ Univers des événements élémentaires possibles : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- ▶ Valeurs possibles pour la va : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Exemple 2 : facteur Rhésus

- ▶ Expérience aléatoire : détermination du facteur rhésus
- ▶ Univers des possibles : $\{\text{positif}; \text{négatif}\}$
- ▶ Valeurs possibles pour la va : $\{0; 1\}$ (codage arbitraire)

Exemple 3 : nombre de filles dans une fratrie de 2

- ▶ Expérience aléatoire : constitution d'une fratrie de 2 enfants
- ▶ Univers des possibles : $\Omega = \{GG; GF; FG; FF\}$
- ▶ Variable aléatoire X : "Nombre de filles"
- ▶ Valeurs possibles pour la va X : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

Variable aléatoire : définition

Définition (à titre informatif)

On appelle variable aléatoire sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \quad X^{-1}([a, b])$ est un événement

Notations

Les **va** sont notées avec des **lettres majuscules** : $X, Y, Z, \dots$

Les **valeurs possibles** ou **réalisations** d'une va sont notées avec des **lettres minuscules** : $x_i, a, z, \dots$

Événements : $(X = k), (0 \leq Z \leq 1), \dots$

Propriétés

Si X et Y sont des va définies sur Ω alors :

- ▶ $X + Y$ est une va
- ▶ $X \times Y$ est une va
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X$ est une va

Deux types de variables aléatoires

Variable aléatoire discrète

Elle prend un nombre **fini** ou **infini dénombrable** de valeurs possibles

Exemples :

- ▶ Résultat d'un lancé de dé
- ▶ Nombre d'opérations réalisées dans un service de chirurgie

Variable aléatoire continue

Elle prend un nombre **infini indénombrable** de valeurs possibles

Exemples :

- ▶ Taux de glucose sanguin
- ▶ Poids des nouveaux nés

Loi de probabilité (1) : cas des va discrètes

Définition

Soit X une va discrète. Sa loi de probabilité est déterminée par

- ▶ l'ensemble des **valeurs possibles** x_i ($i \in I$, fini ou infini dénombrable)
- ▶ les **probabilités** $p_i = P(X = x_i)$

Propriétés

- ▶ $\forall i \in I, P(X = x_i) \geq 0$
- ▶ $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = \sum_{i \in I} p_i = 1$

Représentation classique

valeur possible	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
probabilité	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Exemple de loi de probabilité discrète

Exemple de la fratrie de 2 enfants

- Hypothèse : Probabilité d'avoir un garçon = 0,5

Distribution de probabilité ou loi de probabilité du nombre de filles dans la fratrie :

événements possibles	GG	GF ou FG	FF
valeurs possibles	0	1	2
probabilités	1/4	1/2	1/4

- $P(X = 0) = P(G \cap G) = P(G) \times P(G)$ (indépendance)
- $P(X = 2) = P(F \cap F) = P(F) \times P(F)$ (indépendance)
- $P(X = 1) = P((G \cap F) \cup (F \cap G)) = P(G \cap F) + P(F \cap G)$
(incompatibilité)
 $P(X = 1) = 1/4 + 1/4 = 1/2$

Fonction de répartition : cas discret (1)

Définition

On appelle **fonction de répartition** (fdr) de X toute fonction F telle que $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = P(X \leq t)$

Interprétation

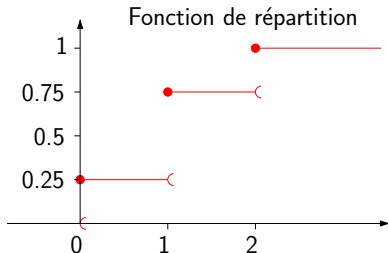
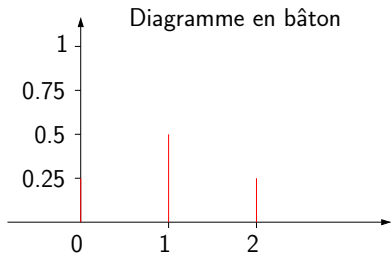
La fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées

Fonction de répartition : cas discret (2)

Exemple de la fratrie de 2 enfants

Valeurs possibles	Probabilités
0	0,25
1	0,5
2	0,25

$t < 0$	$P(X \leq t) = 0$
$t = 0$	$P(X \leq t) = 0,25$
$0 < t < 1$	$P(X \leq t) = 0,25$
$t = 1$	$P(X \leq t) = 0,75$
$1 < t < 2$	$P(X \leq t) = 0,75$
$t = 2$	$P(X \leq t) = 1$
$t > 2$	$P(X \leq t) = 1$



Fonction de répartition : cas discret (3)

Propriétés

- ▶ $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F(t) \leq 1$
- ▶ F est **croissante**
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Dans le cas discret, F est une fonction « en marches d'escalier »

Calcul de probabilités



$$P(X = x_i) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1})$$

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Loi de probabilité : cas des va continues

Problème

L'ensemble des valeurs possibles de X est **infini indénombrable**

- ▶ on ne peut définir la loi de probabilité par l'ensemble des (x_i, p_i)
- ▶ En général, $\forall i, P(X = x_i) = p_i = 0$

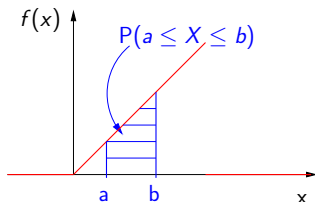
Densité de probabilité

On appelle **densité de probabilité** (ddp) toute fonction f telle que :

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- ▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (aire sous la courbe égale à 1)

Probabilité d'un intervalle

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Fonction de répartition : cas continu

Même définition que dans le cas discret

On appelle **fonction de répartition** (fdr) de X toute fonction F telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$

Mêmes propriétés que dans le cas discret (cf exercices)

► F est **croissante**

► $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

► $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Cas continu : la fdr est **continue** et non plus en marches d'escalier

Lien avec la densité de probabilité - calcul de probabilités

Soit une va X dont la ddp est f . $F : x \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Espérance d'une va

Introduction

Espérance = moyenne théorique

Elle renseigne sur la **position** des valeurs possibles sur une échelle

Définition dans le cas d'une va discrète X

L'espérance de X se note $E(X)$ ou μ_x et est définie par :

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i) = \sum_i x_i \times p_i$$

Si $X(\Omega)$ est fini alors $i \in [0; n]$

Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable alors $i \in [0; +\infty[$

Définition dans le cas d'une va continue

Soit X une va continue et soit f sa ddp. L'espérance de X est définie par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Propriété de l'espérance

Linéarité

Soient X et Y deux va et a et b des nombres réels :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

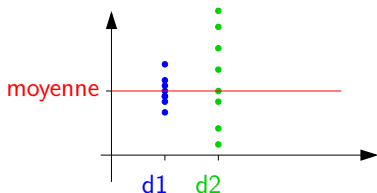
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Variable centrée

- ▶ Si $E(X) = 0$ alors X est une va **centrée**
- ▶ la va $Y = X - E(X)$ est la va centrée associée à X

Variance d'une va

Rappel : variance d'une distribution



La variance d'une distribution mesure sa **dispersion** autour de sa moyenne

Définition générale (cas discret ou continu)

Soit X une va. La variance de X se note $\text{var}(X)$ ou σ_X^2 et est définie par :

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

Autre formule équivalente, plus pratique pour les calculs

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Variance d'une va (2)

Cas discret

Soit X une va :

$$\text{var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$$

Ou alors :

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{avec} \quad E(X^2) = \sum_i x_i^2 \times P(X = x_i)$$

Cas continu

Soit f une ddp de la va X :

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \times f(x) dx$$

Ou alors :

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{avec} \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x) dx$$

Propriétés d'une variance

Positivité

Une variance est **toujours positive (ou nulle)**

La variance n'est pas linéaire !

Soient X et Y deux va et a et b des nombres réels :

$$\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$$

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

Variable réduite

► Si $\text{var}(X) = 1$ alors X est une va **réduite**

Écart-type d'une va

Définition

Soit X une va. L'écart-type de X se note σ_X et se définit par :

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Intérêt : mesure de dispersion dans la même unité de mesure que X

Variable centrée réduite

Soit X une va d'espérance $E(X)$ et d'écart-type σ_X

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$$

Z est la va **centrée réduite** associée à X

- ▶ $E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} \times (E(X) - E(X)) = 0$
- ▶ $\text{var}(Z) = \sigma_Z^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \times \text{var}(X - E(X)) = 1$

Variables aléatoires indépendantes

Rappel : évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Définition dans le cas discret

Soient X et Y deux va **indépendantes** à valeurs respectivement dans $E = \{x_1; x_2; \dots\}$ et $F = \{y_1; y_2; \dots\}$

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in E \times F$$

Propriétés

Si X et Y sont **indépendantes**, alors

- ▶ $\text{cov}(X, Y) = 0$ (Attention, réciproque fausse !)
- ▶ $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors

$$\text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \dots + \text{var}(X_n)$$

Plan du cours

Probabilités

Probabilité conditionnelle

Indépendance

Variables aléatoires

Lois classiques

Lois discrètes : Bernoulli et binomiale

Lois continues : loi normale

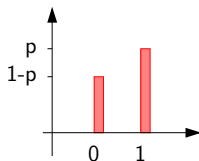
Loi de Bernoulli

Loi de probabilité

Loi d'une va qui ne prend que 2 valeurs : 0 et 1

x_i	0	1
p_i	q	p

$X \rightarrow \text{Bern}(p)$



Espérance et variance

$$E(X) = 0 \times q + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$$

$$\text{var}(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

$$E(X) = p$$
$$\text{var}(X) = pq$$

Utilisation

Modéliser les résultats d'expériences aléatoires ayant **2 issues possibles** (épreuves de Bernoulli)

Exemple : statut maladie d'un individu

Schéma de Bernoulli

Principe

Répéter une épreuve de Bernoulli

- ▶ n fois
- ▶ de façon **indépendantes**

Exemple

Observer la présence (ou l'absence) d'effets indésirables sur un échantillon de 10 patients

Modélisation

Ensemble de n va **indépendantes** qui suivent toutes la **même loi** de Bernoulli de paramètre p

Loi Binomiale (1) : introduction

Le problème

Dans la population, 85% des individus sont de rhésus positif. On considère un groupe de 5 patients : quelle est la probabilité que 2 d'entre eux soient de rhésus positif ?

Modélisation du problème

Pour un patient : soit X la va représentant son groupe rhésus.

On pose :

$$\begin{cases} X = 1 \text{ si l'individu est de Rh+} \\ X = 0 \text{ si l'individu est de Rh-} \end{cases}$$

$X \rightarrow \text{Bern}(p)$ avec $p = P(\text{Rh+}) = 0,85$

Pour les 5 patients : soit S_n la va représentant le nombre de patients Rh+
On **répète** 5 fois l'épreuve de Bernoulli de façon **indépendante**.

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \quad \text{Sn} \rightarrow \text{Binomiale}$$

Loi Binomiale (2) : loi de probabilité

Loi Binomiale et ses deux paramètres n et p

Loi $\mathcal{B}(n, p)$ modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité p

$P(S_n = k)$: probabilité de k succès parmi les n répétitions

$$P(S_n = k) = C_n^k (p)^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Rappels

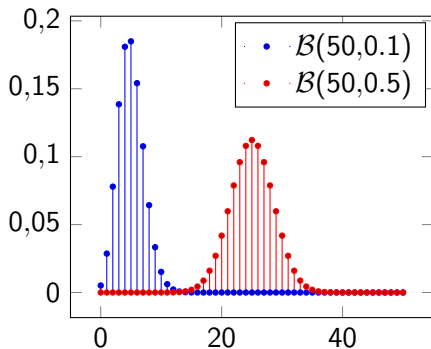
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{Nb combinaisons de } k \text{ éléments parmi } n$$

$0! = 1$

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

Loi binomiale (3) : représentation graphique

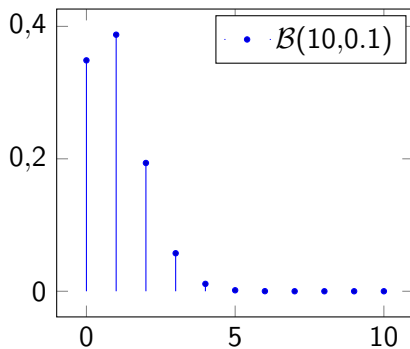
Loi de probabilité



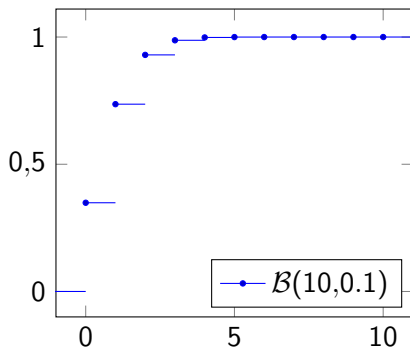
Loi binomiale (4)

Loi de probabilité et fonction de répartition

Loi de probabilité



Fonction de répartition



Loi binomiale (4) : espérance, variance et écart-type

Soit $S_n \rightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Formules

$$\begin{aligned}E(S_n) &= np \\ \text{var}(S_n) &= npq \\ \sigma_{S_n} &= \sqrt{npq}\end{aligned}$$

Comment retrouver les formules ?

$$\begin{aligned}E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= p + p + \dots + p = np\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{var}(S_n) &= \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \dots + \text{var}(X_n) \quad \text{indépendance} \\ &= npq\end{aligned}$$

Loi normale ou loi de (Laplace-)Gauss

Introduction

Loi la plus importante en statistiques

- ▶ Elle modélise de nombreux phénomènes
- ▶ Elle permet d'approximer plusieurs autres lois, en particulier quand on considère des grands échantillons
- ▶ Condition de nombreux tests statistiques

Paramètres

2 paramètres :

- ▶ μ , son **espérance**
- ▶ σ , son **écart-type** (ou σ^2 , sa variance)

Notation : $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ mais aussi $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$

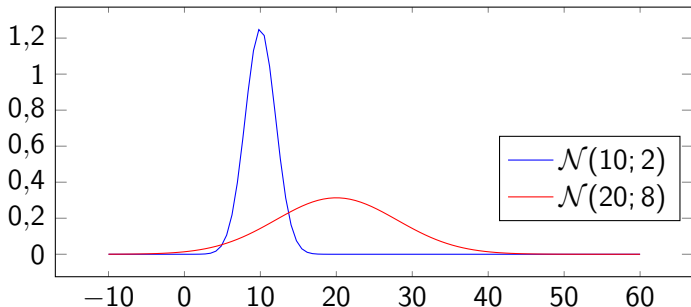
Loi normale (2) : densité de probabilité

Expression analytique

Soit une va X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .
Sa densité de probabilité est définie par :

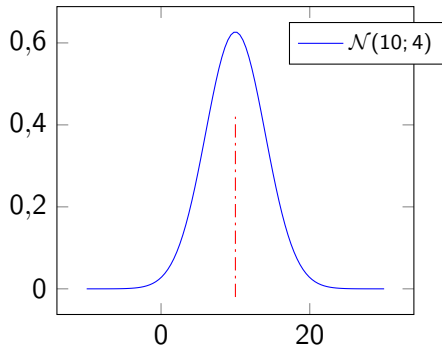
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Représentation graphique



Propriétés

Représentation graphique



- Symétrie par rapport à l'axe vertical passant par μ
- 2 points d'inflexion d'abscisses $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$
- Mode = μ = médiane
- ddp : aire sous la courbe = 1

Combinaison linéaire de va Gaussiennes indépendantes

Soient $X_1 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1)$ et $X_2 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2)$ deux va Gaussiennes indépendantes

$$Y = aX_1 + bX_2 \rightarrow \mathcal{N}\left(a\mu_1 + b\mu_2; \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)$$

Fonction de répartition

Expression analytique

Soit une va X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .
Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

Calcul de probabilités

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

L'intégrale ne peut se résoudre de façon algébrique → utilisation de **tables**

La loi normale centrée-réduite (ou loi normale standard)

Définition

Loi normale d'espérance $\mu = \mathbf{0}$ et d'écart-type $\sigma = \mathbf{1}$

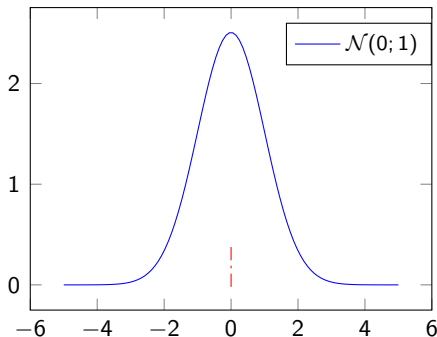
Passage de $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ à $Z \rightarrow \mathcal{N}(0; 1)$:

- ▶ On retranche μ (*centrer*)
- ▶ On divise par σ (*réduire*)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

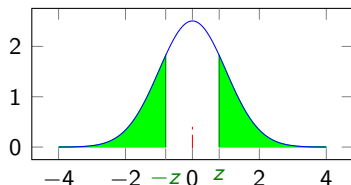
Densité de probabilité

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(\frac{-1}{2}z^2\right)$$



Propriété de loi normale centrée-réduite

Représentation graphique



- Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
- 2 *points d'inflexion* d'abscisses -1 et $+1$
- Mode $= 0 =$ médiane
- ddp : aire sous la courbe $= 1$

Calcul de probabilités

On note Φ la fdr de la loi normale centrée réduite

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

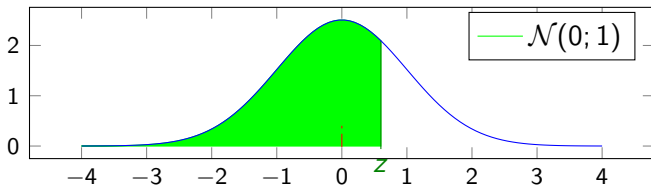
$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z) = \Phi(-z) \text{ (symétrie de la ddp/axe ordonnées)}$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

La table de la fonction de répartition (table 1)



Pour une valeur de z donné, la table donne $P(Z \leq z)$

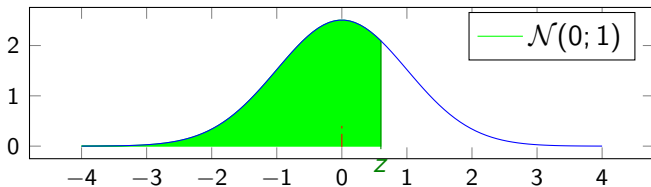
Exemple

Lire dans la table

- $P(Z \leq 1,42)$
- $P(Z \leq -0,21)$

- $P(Z \geq 0,41)$

La table de la fonction de répartition (table 1)



Pour une valeur de z donné, la table donne $P(Z \leq z)$

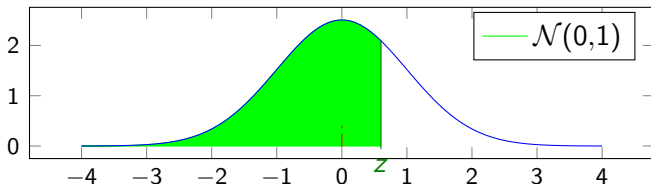
Exemple

Lire dans la table

- ▶ $P(Z \leq 1,42)$
- ▶ $P(Z \leq -0,21)$
- ▶ $P(Z \geq 0,41)$
- ▶ $P(Z \leq 1,42) = \Phi(1,42) = 0,9222$
- ▶ $P(Z \leq -0,21) = \Phi(-0,21) = 1 - \Phi(0,21)$
 $P(Z \leq -0,21) = 1 - 0,5832 = 0,4168$
- ▶ $P(Z \geq 0,41) = 1 - P(Z \leq 0,41) = 1 - \Phi(0,41)$
 $P(Z \geq 0,41) = 1 - 0,6591 = 0,3409$

Table de la fdr pour p donné (table 2)

Attention, changement de table par rapport à 2023/2024



Pour une probabilité p donnée, la table donne z tel que $P(Z \leq z) = p$

Exemple

Lire dans la table la valeur de z telle que :

- ▶ $P(Z \geq z) = 0,025$
- ▶ $P(Z \leq z) = 1 - 0,025 = 0,975 \rightarrow z = 1,96$
- ▶ $P(Z \geq z) = 0,75$
- ▶ $P(Z \geq z) = 0,75 \rightarrow P(Z \leq -z) = 0,75$
(Symétrie de la courbe)
on lit $-z = 0,6745$, donc $z = -0,6745$

Le théorème central limite (TCL)

Énoncé simplifié

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables **mutuellement indépendantes** de **même loi** de probabilité $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$, alors lorsque n est **suffisamment grand** la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit approximativement une **loi normale** d'espérance $n \times \mu$, et d'écart-type $\sqrt{n} \times \sigma$

Conséquence pour la variable M (moyenne d'échantillon)

$$M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Lorsque n est suffisamment grand, alors M suit approximativement une **loi normale** d'espérance $\mu_M = \mu$ et d'écart-type $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Remarques

- ▶ Dans ce cours, on considèrera n suffisamment grand quand $n \geq 30$
- ▶ Le TCL explique l'importance de la loi normale dans la nature

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Approximation

Soit $S_n \rightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et soit $X \rightarrow \text{Bern}(p)$.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ les } X_i \text{ étant indépendantes et de même loi que } X$$

D'après le TCL, on peut **approcher** la loi de S_n par une loi normale $\mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$.

En pratique

Si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on approchera $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$