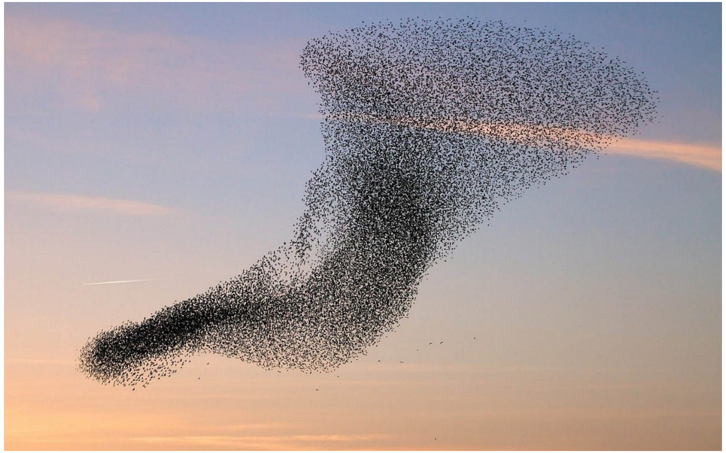
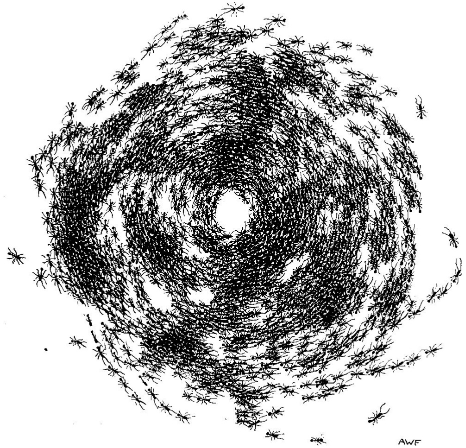
Modélisation de comportements collectifs

Alexis Raulin–Foissac
mail: alexis.raulin-foissac@univ-lyon1.fr





Objectifs du cours

- (première) Expérience d'**application concrète** de méthodes informatiques
- Comprendre la **démarche** de modélisation
- Implémenter efficacement un modèle
- **Observer**, **analyser**, et **communiquer** des résultats
- Proposer des améliorations à la modélisation

Outils et méthodes utilisés:

- python: matplotlib, numpy, …
- dynamique à N corps: listes de voisin/grille

Organisation du cours

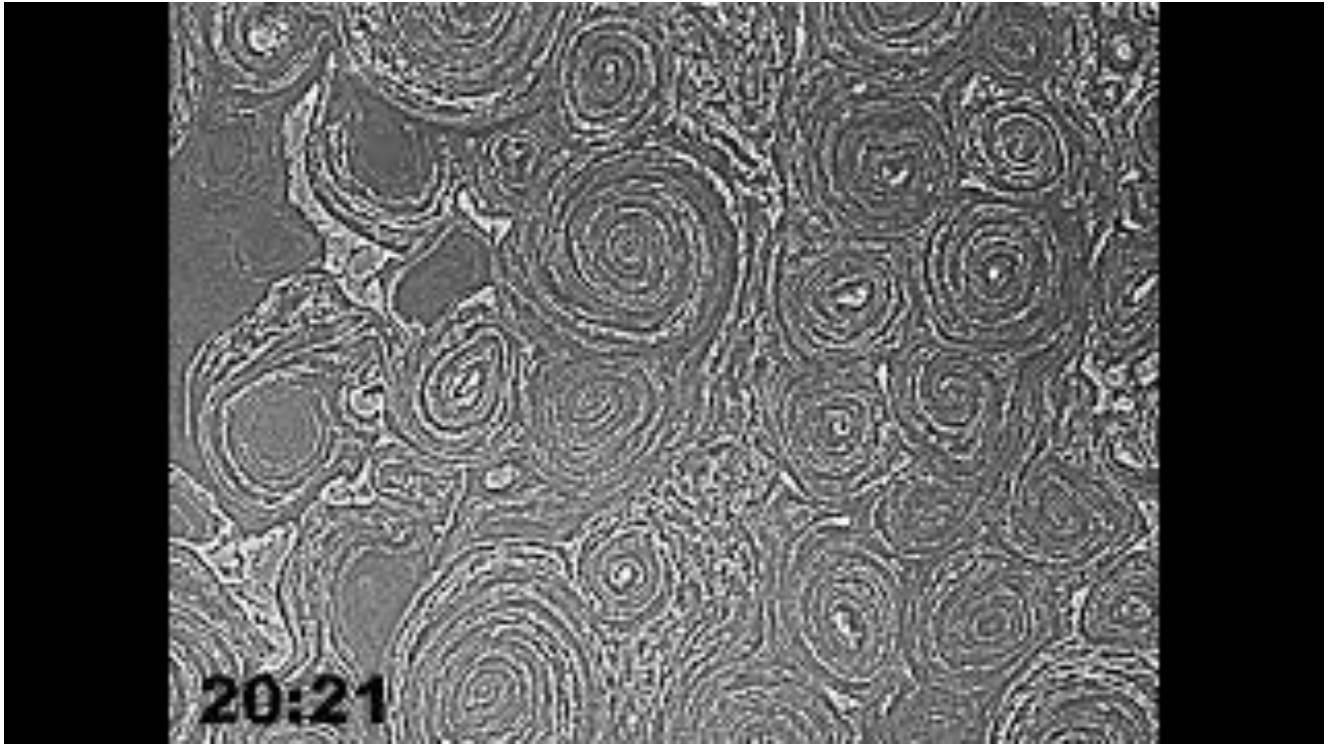
Alternance entre cours et applications sur ordinateur

Notation: investissement/sérieux au fil des séances

Plan:

I. Introduction et exemples de comportements collectifs
II. Modélisation d’agents
III. Implémentation
IV. Optimisation du code
V. Exploitation du modèle
VI. Extensions potentielles

Mouvements collectifs à travers les échelles



Cellules qui s'organisent pour remplir l'espace efficacement

Mouvements collectifs à travers les échelles

“Spirale de la mort” de fourmis suivant chacune leur voisin de devant

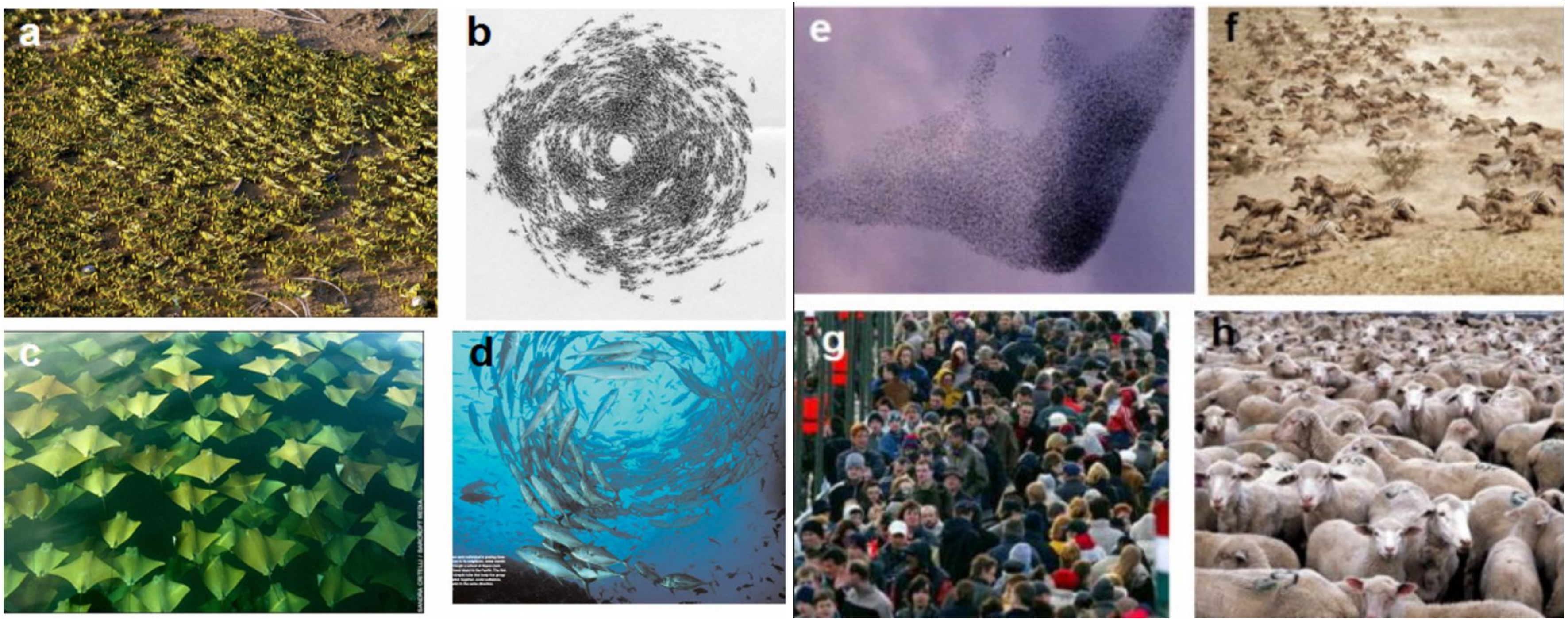
Mouvements collectifs à travers les échelles

Banc de poissons et d’oiseau

Mouvements collectifs à travers les échelles

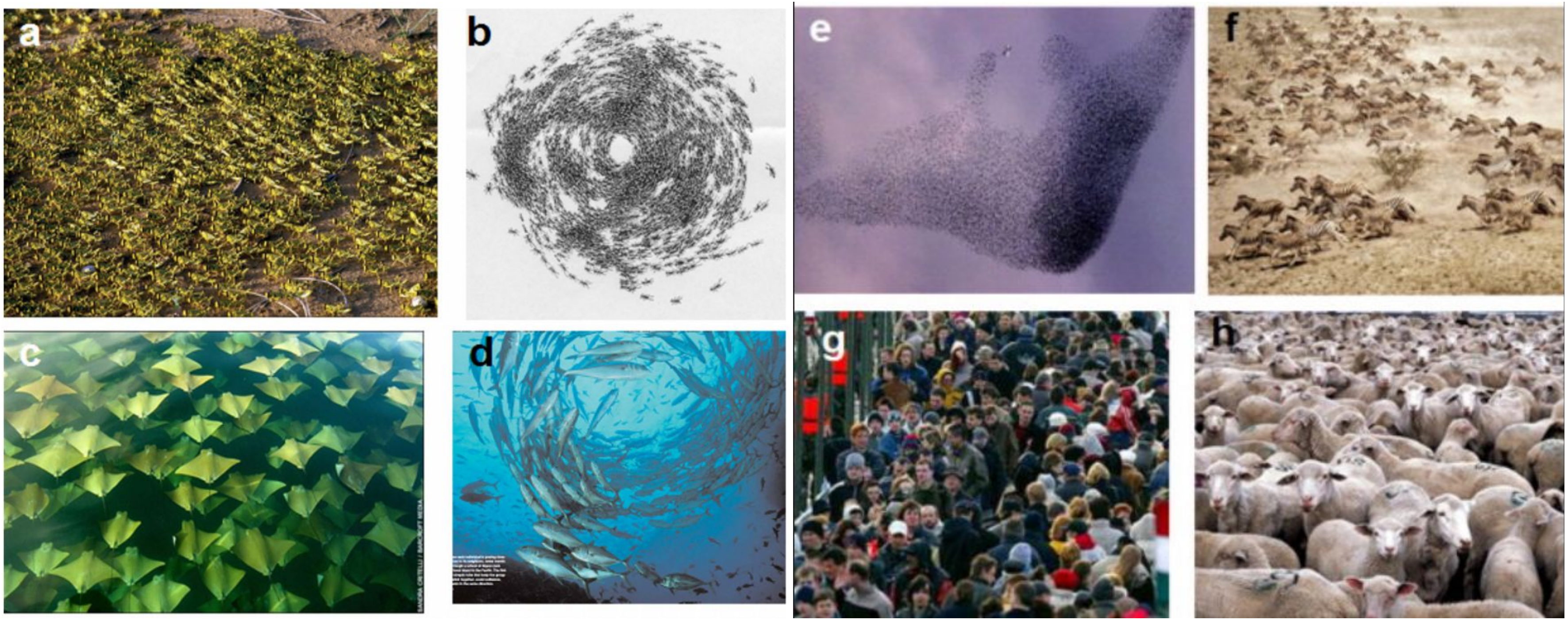
Ondes se propageant dans la foule (Concert d'Oasis, Manchester 2005)

Mouvements collectifs à travers les échelles



Existe-il des **règles générales** qui régissent ces comportements ?
Peut-on les **modéliser** efficacement ?

Mouvements collectifs à travers les échelles



Objectif du cours: **Modéliser** et **reproduire** numériquement ces mouvements collectifs

Modélisation de ces assemblées

Ingrédients pour réaliser une bonne modélisation:

Modélisation de ces assemblées

Ingrédients pour réaliser une bonne modélisation:

- **Variables** simples mais exhaustives
  décrivant les entités (tailles, positions…)

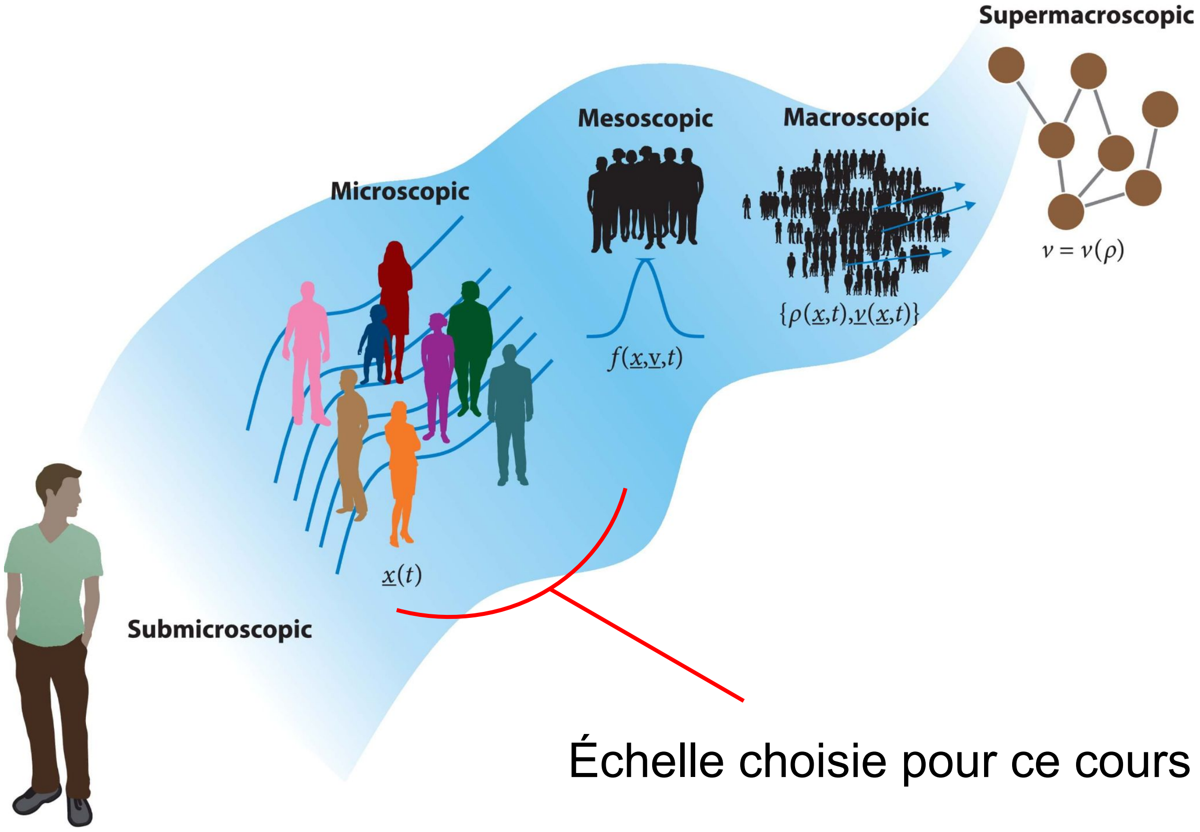
- **Description** de l'environnement (obstacles, conditions aux bords…)

- Ensemble de **règles** simples modélisant:
  - l'évolution des entités
  - interaction inter-particules
  - interactions avec l'environnement

Variables descriptives

Différentes **échelles**

→ différentes **variables** pour décrire le système



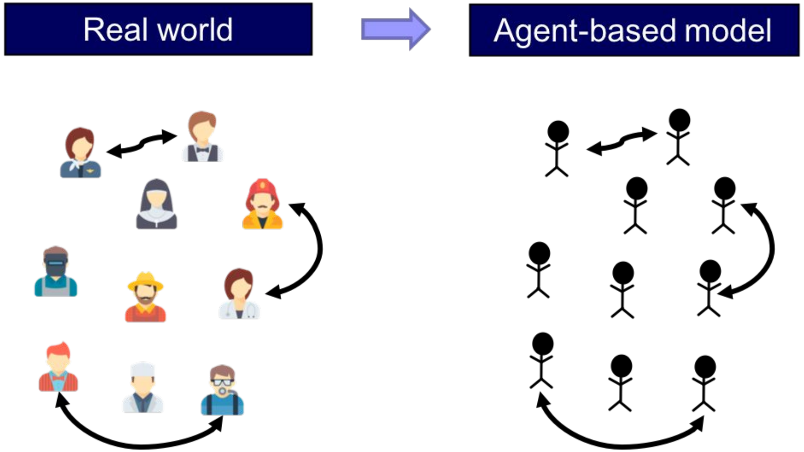
Échelle choisie pour ce cours

Corbetta A, Toschi F. 2023
Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 14:311–33

À l'échelle micro

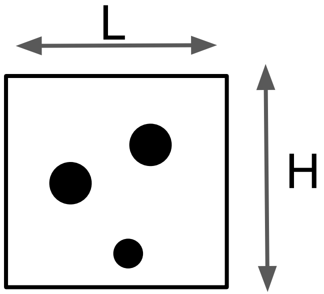
Représentation du système:

- **Coordonnées** : $(x_i(t), \theta_i(t))$
- **Vitesses** : $v_i(t)$
- **Taille** des entitées (ou forme) : R_i

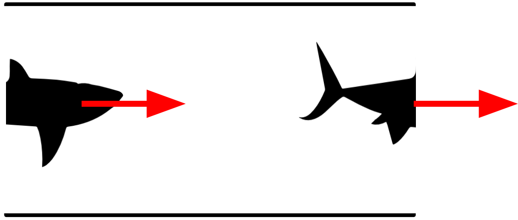


Et de l'environnement:

- Taille et forme
- Obstacles
- Conditions aux bords



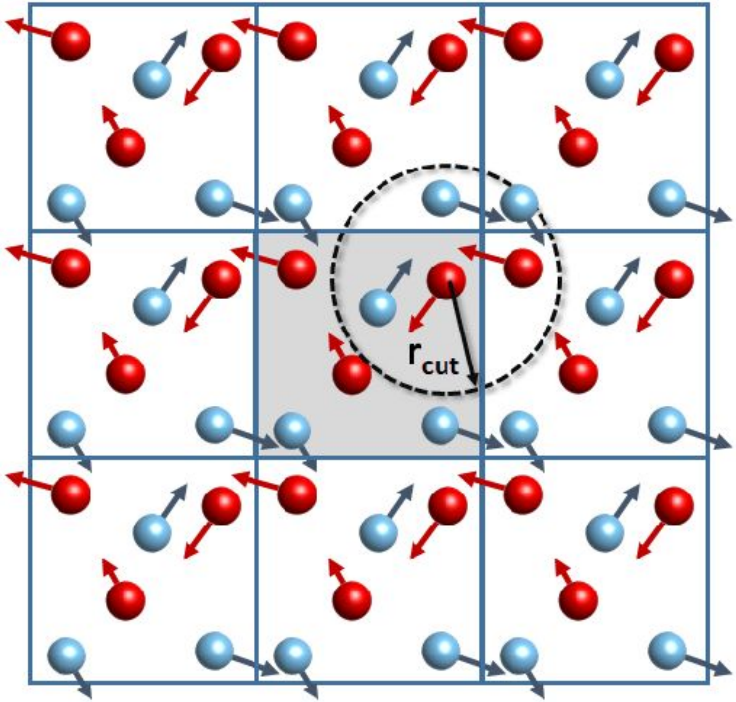
Boîte fermée avec obstacles



Couloir infini avec **conditions périodiques**

Conditions périodiques pour modéliser un espace infini

Duplique la boîte simulée
→comment calculer les distances inter particules ?



Dans un carré de côté L:

$$\Delta x_{\text{periodique}} = \Delta x - L \times \text{round}\left(\frac{\Delta x}{L}\right)$$

→$\Delta x_{\text{periodique}} \in [-L/2, L/2]$ est la plus courte distance

Finalement $d = \sqrt{\Delta x^2_{\text{periodique}} + \Delta y^2_{\text{periodique}}}$

Application: Coder distance_periodique(L, point1, point2) en python avec numpy

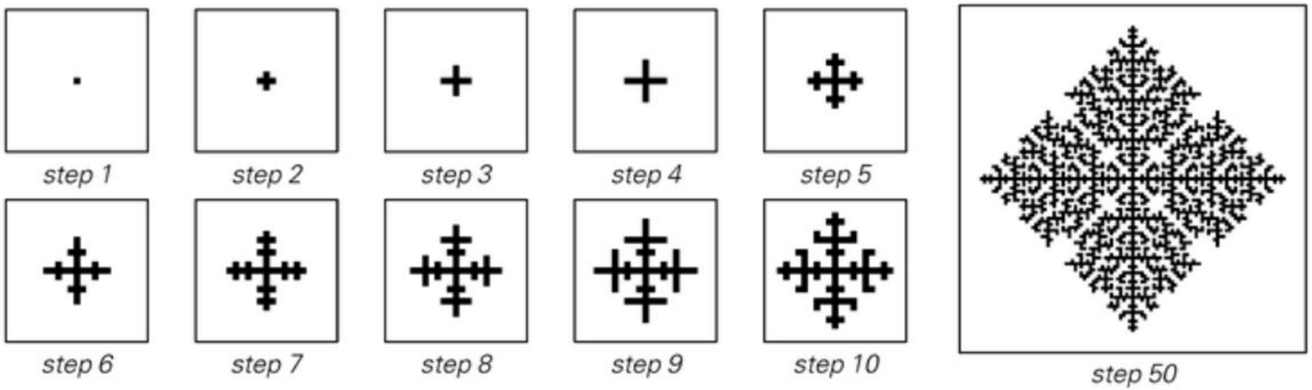
Évolution du système

Ensemble de règle pour passer de $(r_i(t), \theta_i(t), v_i(t))$ à $(r_i(t+dt), \theta_i(t+dt), v_i(t+dt))$

pas de temps

Exemples:

Règles discrètes



Automates cellulaires (exemple: jeu de la vie)

Évolution du système

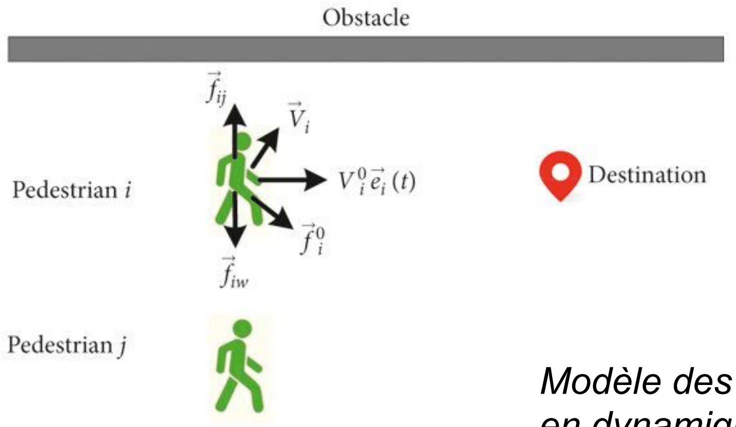
Ensemble de règle pour passer de $(r_i(t), \theta_i(t), v_i(t))$ à $(r_i(t+dt), \theta_i(t+dt), v_i(t+dt))$

pas de temps

<u>Exemples:</u>

Règles continues avec équations différentielles

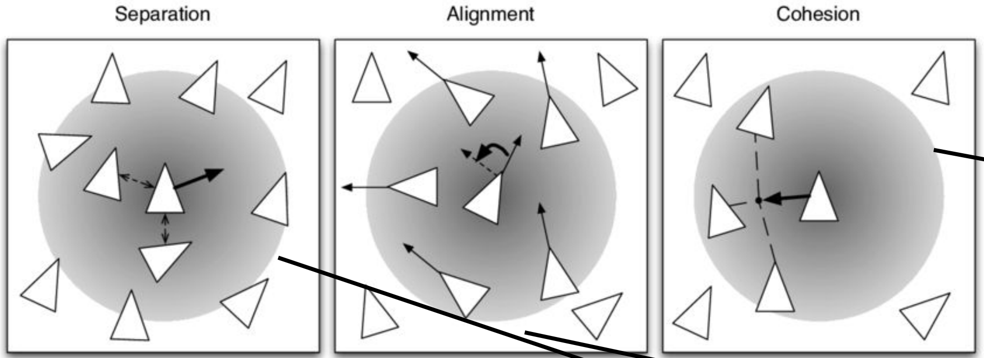
$$\left\{ \begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum \vec{F} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \end{aligned} \right\}$$



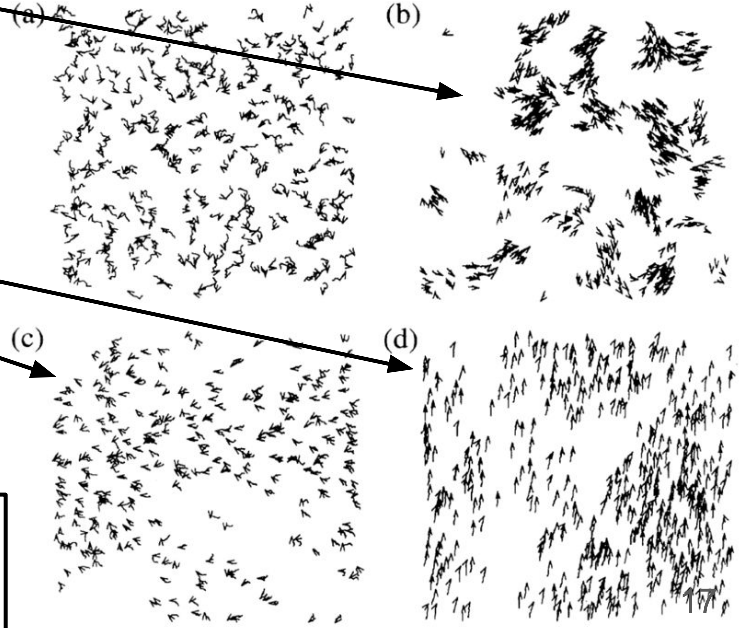
Modèle des forces sociales en dynamique piétonne

Évolution du système

Approche à la physicienne: quelques **interactions simples** avec **peu de paramètres**



Exemple de règles simples dans le modèle de Reynolds *(Bouraqadi, N., & Doniec, A. (2022, July 05). Flocking-Ba Multi-Robot Exploration.)*



L'intensité des différents termes dicte la dynamique:
Jhawar, J., Morris, R. G., & Guttal, V. (2018). Deriving mesoscopic models of collective behaviour for finite populations.

Des **interactions locales simples** suffisent souvent pour décrire les transitions vers des **comportements collectifs**

Modèle de Vicsek

“Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles”, Viscek (1995):

Règles : Particules se déplaçant à vitesses constantes et qui **ajustent** leurs direction suivant la **direction moyenne** de leur voisin. Un **bruit aléatoire** est ajouté pour perturber l’alignement et simuler les incertitudes des agents.

Observation de divers comportements suivant les paramètres:

- alignements complets
- structures de groupes (~ bancs de poisson)
- mouvement désordonné

Modèle de Vicsek

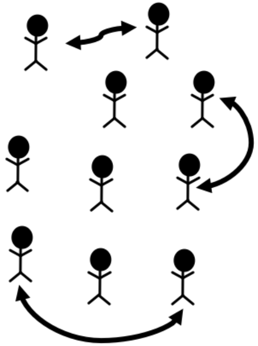
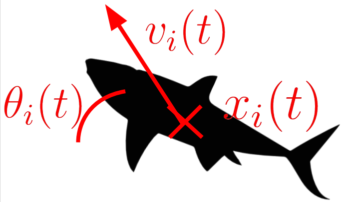
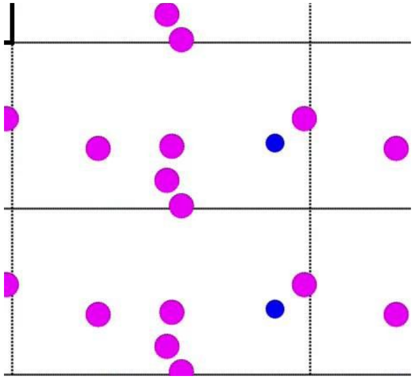
Particules ponctuelles se déplaçant à vitesse v_0 dont la direction θ est la moyenne de celle du voisinage plus un bruit: $$\theta_i(t+\Delta t) = \langle \theta_j(t) \rangle_{|r_i - r_j| < R} + \eta_i(t)$$

Mise à jour de la position de chaque particule: $$r_i(t+\Delta t) = r_i(t) + v_0 \Delta t \begin{bmatrix} \cos \theta_i(t+\Delta t) \\ \sin \theta_i(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

Paramètres:

- R le rayon d'interaction
- v_0 la vitesse des particules
- Δt le pas de temps
- ρ la densité de particules
- η tel que la bruit $\eta_i(t)$ soit d'amplitude 2πη

Choix de modélisation effectués:

Échelle	Description	Environnement	Règles d'évolution
Microscopique/individuelle	$x_i(t), v_i(t), \theta_i(t), R_i$	Carré à bords périodiques	Modèle de Vicsek
			$\Theta_i(t+\Delta t) = \langle \Theta_j \rangle_{\lvert r_i - r_j \rvert < r} + \eta_i(t)$ $\mathbf{r}_i(t+\Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + v\Delta t \begin{pmatrix} \cos\Theta_i(t) \\ \sin\Theta_i(t) \end{pmatrix}$

Implémentation: à vous

<u>Objectifs:</u>

1. Définition des variables pour les positions et orientations
2. À chaque itération:
   a. trouver les voisins de chaque particule (attention aux conditions périodiques)
   b. moyenner leurs orientations et rajouter du bruit
   c. En déduire leurs nouvelles positions et orientations
   d. Mettre à jour la visualisation matplotlib

Rappel du modèle (avec $R = \Delta t = v_0 = 1$):

$$\theta_i(t+\Delta t) = \langle \theta_j(t) \rangle_{|r_i - r_j| < R} + \eta_i(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_i(t+\Delta t) \\ y_i(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} + v_0 \Delta t \begin{bmatrix} \cos\theta_i(t+\Delta t) \\ \sin\theta_i(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

Exemples de valeurs pour la taille du carré et la densité:
$L = 20$, $N = 0.5 * L^2 = 200$

Observations et analyses: paramètre d’ordre

Qualitativement:

- “clusters/bancs” lorsque le bruit est ~ nul
- alignement de grands ensemble à faible bruit
- comportement désordonnée à grand bruit

→ Introduction d’un paramètre φ qui caractérise quantitativement l’état du système:

$$\varphi = \frac{1}{N v_0} \left| \sum_i \vec{v_i} \right|$$

Suivant les états:

- alignement/cohésion : φ ≃ 1
- désordre : φ ≃ 0

→ φ est un **paramètre d’ordre**

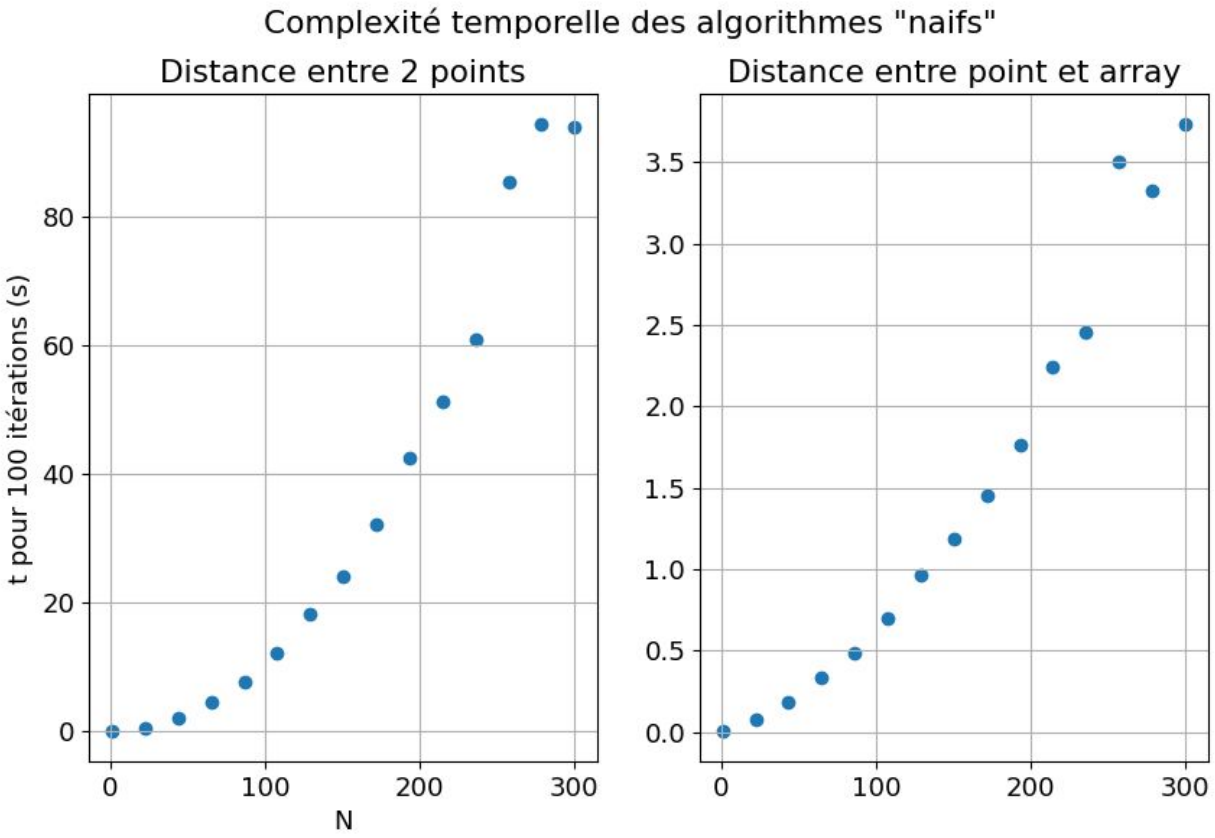
Observations et analyses: Transitions de phases

Mesure du paramètre d'ordre
Calculer et afficher φ au cours de la simulation avec
text = plt.text(x, y, str(phi))
text.set_text(str(phi)) # mise à jour de la valeur

Problème observé: dès que l'on augmente trop le nombre d'agents le temps de calcul explose

À quelle complexité temporelle s'attend-on ?
→mesurer numériquement le temps de calcul en fonction du nombre de particules et vérifier la loi attendue

Optimisation du code:



Optimisation du code: grille et listes de voisins

Calcul des interactions entre chaque particules $\rightarrow$ complexité en $O(N^2)$

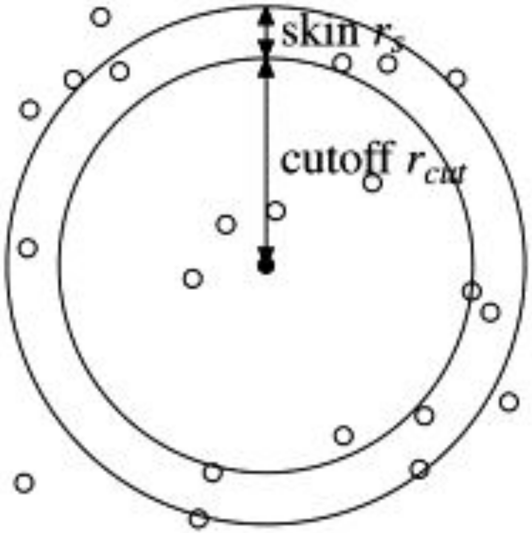
Plusieurs méthodes pour réduire la complexité:

- **Listes de verlet**: stocker les voisins dans une liste que l'on update toutes les n itérations
- **Discrétiser** l'espace en une **grille** dont chaque case contient les indices des particules qui s'y trouve

Listes de Verlet

Implémentation (à faire):

- Créer une liste *voisins* telle que *voisins[i]* contient la liste des potentiels voisins de *i*
  (de distance maximale légèrement supérieure à la distance d'interaction, par exemple 2)
- Dans *update* chercher les voisins de i uniquement parmi *voisins[i]*
- Mettre à jour *voisins* lorsque les particules ont suffisamment bougé (par exemple toutes les n = 10 itérations)



Yao, Z., Wang, J.-S., Liu, G.-R., & Cheng, M. (2004). Improved neighbor list algorithm in molecular simulations using cell decomposition and data sorting method.

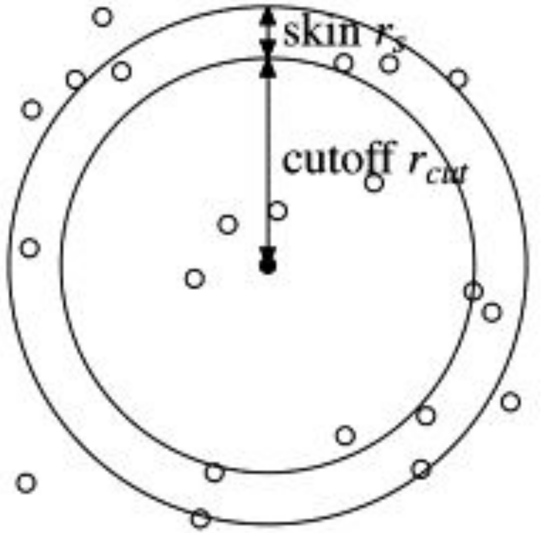
Le calcul en O(N²) est effectué n fois moins souvent -> complexité ~ O(N)

Listes de Verlet

Tests et performances (à faire):

- Regarder l'influence des deux nouveaux paramètres (distance seuil pour mettre dans voisins et temps d'actualisation)

- Mesurer la complexité temporelle de l'algorithme et comparer à ce qui est attendu



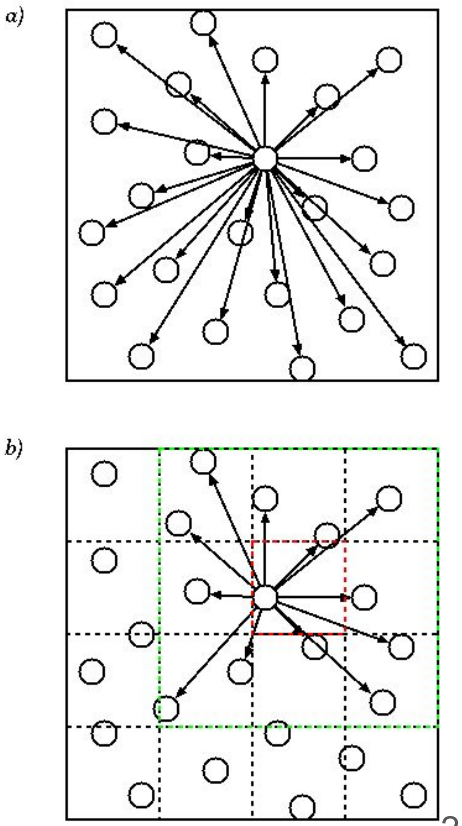
Yao, Z., Wang, J.-S., Liu, G.-R., & Cheng, M. (2004). Improved neighbor list algorithm in molecular simulations using cell decomposition and data sorting method.

Maillage cellulaire

Principe:

- On sépare l'espace en un ensemble de case de la taille d'interaction (ici de taille 1 par 1)
- À chaque itération, attribuer à chaque particule sa case correspondante : O(N)
- Calculer les interactions uniquement avec les particules des cellules voisines à distance d'interaction : O(N)

Efficace à **densité élevée** car à faible densité la plupart des cases sont vides



wikipedia

Maillage cellulaire

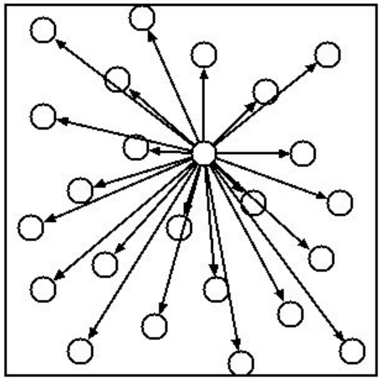
Implémentation (à faire):

- Introduire un tableau *grille* tel que *grille[i,j]* contient la liste des particules se trouvant dans la case i j c'est à dire pour i <= x < i+1 et j <= y < j+1
- Chercher les voisins de chaque particule parmi les 9 cases alentours

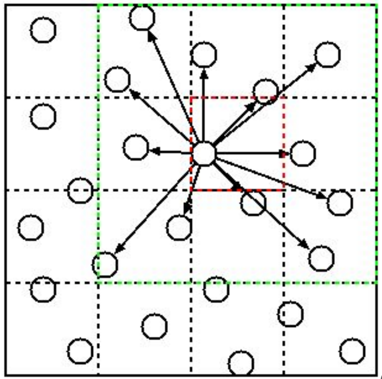
Tests et performances:

- Comparer l'efficacité à celles méthodes précédentes/ observer la complexité temporelle
- Tester le module KDTree de scipy

a)



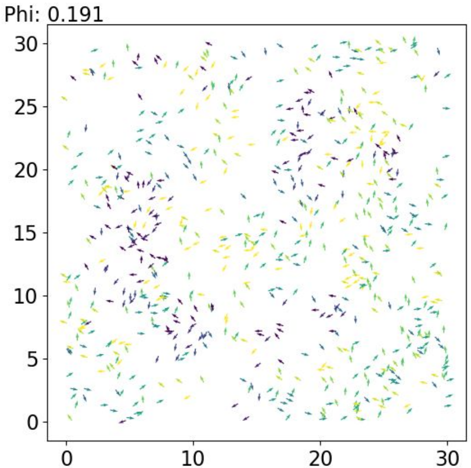
b)

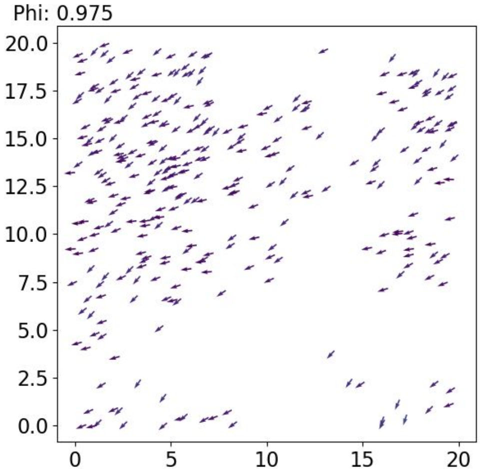


Caractérisation de l’état du système

Transition de phase: en physique, désigne le passage d'un système d'un état à un autre lorsqu'un ou plusieurs paramètres externes subissent des variations. (liquide - solide lorsque l’on baisse la température)

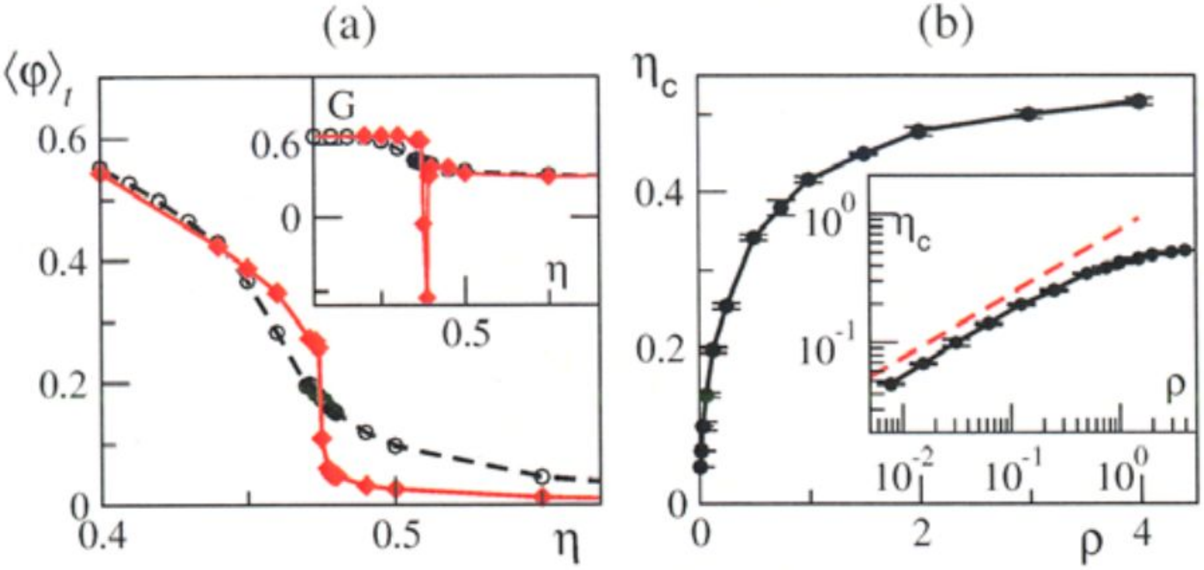
Caractérisation à travers un **paramètre d’ordre** qui changent drastiquement lors de la transition, dans notre cas: $\varphi = \frac{1}{Nv_0}\left|\sum_i \vec{v_i}\right|$





Modèle de Vicsek

Résultats attendus: à ρ (densité) fixée, augmenter η (le bruit) diminue φ



Chaté, H., Ginelli, F., Grégoire, G., Peruani, F., & Raynaud, F. (2008). Modeling collective motion: variations on the Vicsek model.

Pour chaque densité, il existe un bruit critique η_c séparant les mouvements ordonnés et désordonnés, ce bruit critique augmente avec la densité

Exploitation du modèle

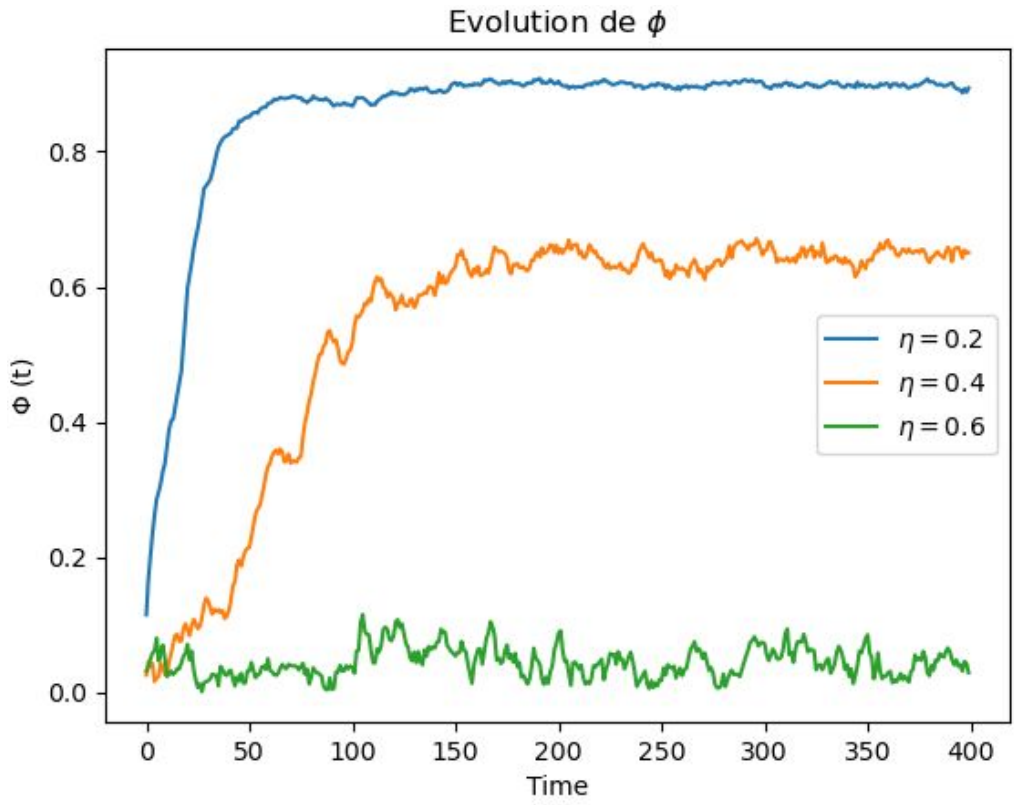
<u>Objectifs</u>:

1) Réalisation et sauvegarde d’une expérience:
   - Mesurer φ au cours du temps pour une certaine densité et un certain bruit
   - Observer le résultat en traçant avec matplotlib $\varphi(t)$
   - Sauvegarder dans un fichier txt avec np.savetxt la liste des valeurs de φ

2) Mesure du bruit critique
   - Répéter le processus pour des valeurs de bruit allant de 0 à 1
   - Mesurer pour chaque réalisation (en exploitant les fichiers sauvegardés) la valeur de φ vers laquelle le système a convergé en effectuant une moyenne temporelle
   - Observer la transition de phase avec un graphe $\varphi(\eta)$ et déduire η_c

3) Influence des paramètres
   - Observer l’influence de la taille/densité du système sur la transition
   - Présenter et comparer au graphe de l’article les différents résultats obtenus

Exploitation du modèle



Quelques pistes pour prolonger le modèle…

Introduction d’une seconde espèce: par un “prédateur” comme un requin qui attaquerait un banc de poisson et voir son impact sur φ

Ajout d’interactions attractives/répulsives: empêcher la superposition des particules, favoriser la cohésion de groupes

Ajout d’obstacles ou bien de zones d’attractions

Tout est possible…