

Examen terminal de Probabilités Avancées - janvier 2025 - 2h

Calculatrice type collège non nécessaire mais autorisée.

Toute réflexion sera prise en compte.

Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans n'importe quel ordre.

*Les réponses aux questions peuvent également être fournies dans n'importe quel ordre, à condition de **clairement indiquer** leur numéro et l'exercice correspondant.*

*Le barème indiqué est **indicatif** et est susceptible de varier légèrement.*

Exercice 1 Exercices de calcul - 5.5 points

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ x/2 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1[\\ x & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } y \geq 1 \\ 1/2 & \text{si } x > 1 \text{ et } y \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}.$$

Montrer que F est une fonction de répartition.

2. Soit

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ e^1 x(yx + 1 - e^{-y}) & \text{pour } (x, y) \in [0, e^{-1}] \times [0, 1] \\ ye^{-1} + 1 - e^{-y} & \text{si } x > e^{-1} \text{ et } y \in [0, 1] \\ e^1 x(x + 1 - e^{-1}) & \text{si } x \in [0, e^{-1}] \text{ et } y > 1 \\ 1 & \text{si } x > e^{-1} \text{ et } y > 1 \end{cases}.$$

On **admet** que F_2 est une fonction de répartition.

Quelle est la densité du couple (X, Y) qui a cette fonction de répartition ? Sur quel domaine de $\mathbb{R}^2$ prennent-ils des valeurs ?

3. On **admet** que si $X \sim Poi(\lambda)$ alors sa fonction caractéristique est

$$\Phi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

(a) Calculer la fonction caractéristique de $Z = \alpha X + \beta$

- (b) Soit $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Poi}(\mu)$. On suppose que X et Y sont indépendants. Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$. Peut-on en déduire la loi de $X + Y$? Si oui, la donner.
4. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
0	1/20	3/20	8/20
1	5/20	1/20	2/20

Calculer la fonction caractéristique $\Phi_{(X,Y)}(t, u)$ de (X, Y) .

Exercice 2 *Espérance d'une somme aléatoire* - 5 points

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires admettant la même espérance $m = \mathbb{E}[X_1]$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui admet une espérance, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On s'intéresse dans cet exercice à la variable aléatoire S_N .

- Exemple avec des lois spécifiques : Si $N \sim \mathcal{G}(1/2)$ et les variables X_n sont équiprobables sur $\{1, \dots, 6\}$, donner une façon de simuler S_N à l'aide d'un dé et d'une pièce.
- On se replace dans le cadre général, où la loi de N n'est pas connue et où on connaît uniquement m dans la loi des $(X_n)_n$.
 - Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{E}[S_N \mid N = j]$. En déduire $\mathbb{E}[S_N \mid N]$.
 - Que vaut $\mathbb{E}[S_N]$?
 - Que se passerait-il si $\mathbb{E}(N) = \infty$?
- Application** : En reprenant les lois de la question 1, que vaut alors $\mathbb{E}(S_N)$?
- Application** : Le nombre de clients se rendant dans une pâtisserie est une variable aléatoire de moyenne 100. La somme dépensée par les clients est aussi une variable aléatoire de moyenne 15 euros. **En précisant les hypothèses faites**, quelle est la somme totale quotidienne que le magasin reçoit en moyenne?

Exercice 3 *Fonction caractéristique - 9.5 points*

1. **Question de cours :** Rappeler la propriété qui relie la fonction caractéristique d'un couple (X, Y) et l'indépendance du couple. (Etre précis sur s'il s'agit d'une implication ou d'une réciproque)
2. **Question de cours :** Quelle propriété a-t-on reliant Φ_{X+Y} , Φ_X et Φ_Y ? Bien préciser les hypothèses.
3. Nous allons maintenant considérer un contre-exemple. Soit X et Y le résultat de deux lancers. Soit p un paramètre dans $[0, 1]$. On définit leur loi jointe par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } (i, j) \in \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ 2p/9 & \text{si } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}, \\ 2(1-p)/9 & \text{si } (i, j) \in \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}, \end{cases}$$

- (a) Calculer la loi marginale de X et la loi marginale de Y . Cette loi a-t-elle un nom ?
- (b) A-t-on X et Y indépendants ? Est-ce que cela dépend de p ?

Dans la suite, on prendra $p \neq 1/2$.

- (c) Montrer que

$$\Phi_X(t) = \frac{e^{it}}{3} (1 + e^{it} + e^{2it}).$$

Quelle est la fonction caractéristique de Y ?

- (d) **(Indépendant des questions a à c)** Calculer la loi de $X_1 + X_2$, et montrer qu'elle est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } k \in \{2, 6\}, \\ 2/9 & \text{si } k \in \{3, 5\}, \\ 1/3 & \text{si } k = 4, \end{cases}$$

- (e) Calculer la fonction caractéristique Φ_{X+Y} de $X + Y$.
- (f) Calculer $\Phi_X(t) \times \Phi_Y(t)$.
- (g) Que remarque-t-on dans le calcul précédent ? En faisant le lien avec la question 2, expliquer en quelques phrases si cela semble cohérent.