

SEMESTRE 4

2006-2007

MODULE F412 :

MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES

PROBLÈMES et CORRIGES

Bienvenue à vous

au laboratoire de :

Dimensionnement Des Structures

du Département :

Génie Mécanique et Productique

Ce livre électronique est destiné à compléter le cours enseigné durant la deuxième année du module F412, et relatif au Quatrième Semestre.

Il reprend le plan suivi en amphithéâtre avec d'avantages de détails, d'illustrations ainsi que des corrigés des Problèmes du fascicule Travaux Dirigés qui, nous l'espérons, vous permettront de mieux comprendre cette matière qui n'est pas si terrible qu'elle peut laisser paraître.

A présent, choisissez sur votre gauche dans l'onglet signet un chapitre du programme que vous désirez voir ou revoir .

BON TRAVAIL-BON COURAGE

F412

MÉTHODE DE CLAPEYRON

MÉTHODE DE MAXWELL-MOHR ET DE CASTIGLIANO

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

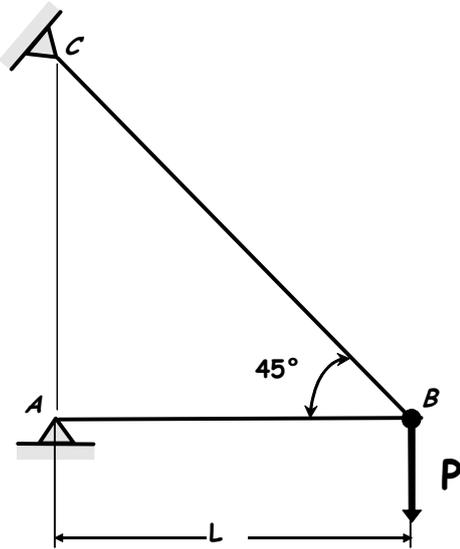
PROBLEMES DE SYNTHÈSE

ANNEXE A1. INTEGRALES DE MOHR

ANNEXE A2. MOMENTS FLÉCHISSANTS DANS QUELQUES CAS SIMPLES

1. MÉTHODE DE CLAPEYRON

PROBLÈME N°1



Les barres AB et BC (de même section droite A et de même matériau) sont articulées en A, B et C. Une force verticale P est appliquée en B.

1°) Déterminez l'expression littérale de l'énergie de déformation élastique emmagasinée par les deux barres en fonction de P, L, E et A.

2°) En déduire l'expression littérale du déplacement vertical du point B.

3°) Peut-on avec cette méthode, calculer la déplacement horizontal de B ?

Application numérique : P=10kN, L=2m, E=200GPa et A=1cm². Calculez la valeur (en J) de l'énergie de déformation élastique et la valeur du déplacement vertical

du point B en mm).

RÉPONSES N°1

1)

Nous devons pour appliquer la méthode de Clapeyron :

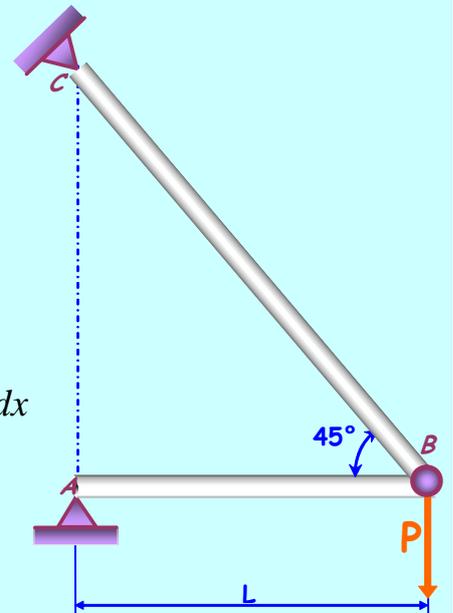
$W_{ext} = W_{def}$ calculer l'énergie de déformation emmagasinée dans les deux barres, et l'identifier avec le travail de la force extérieure

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \quad W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_{vB}$$

$$W_{def} = \sum_{barres} \int_0^L \left(\frac{N_X^2}{2EA} + \frac{T_Y^2}{2GA} + \frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_X^2}{2GI_G} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} + \frac{M_Z^2}{2EI_Z} \right) dx$$

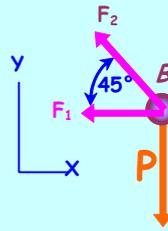
Compte tenu que les deux barres sont articulées en A, B, et C elles ne sont soumises qu'à des efforts normaux.

$$W_{def} = \sum_{barres} \int_0^L \left(\frac{N_X^2}{2EA} \right) dx = \int_A^B \left(\frac{N_X^{AB}}{2EA} \right)^2 dx + \int_B^C \left(\frac{N_X^{BC}}{2EA} \right)^2 dx$$



Pour trouver les efforts normaux s'exerçant dans les barres AB et CD, mettons en équilibre le nœud B :

$$\begin{cases} -F_1 - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -P + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = P\sqrt{2} \\ F_1 = -P \end{cases}$$



Après application du principe d'action mutuelle

$$N_X^{AB} = -P \quad N_X^{BC} = P\sqrt{2}$$

d'où :

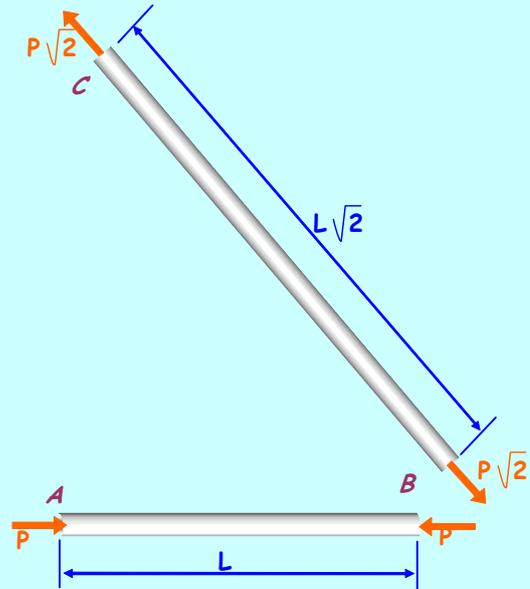
$$W_{déf} = \int_0^L \left(\frac{(-P)^2}{2EA} \right) dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \left(\frac{(P\sqrt{2})^2}{2EA} \right) dx$$

$$W_{déf} = \frac{P^2}{2EA} \int_0^L dx + \frac{P^2}{EA} \int_0^{L\sqrt{2}} dx$$

$$W_{déf} = \frac{P^2}{2EA} [x]_0^L + \frac{P^2}{EA} [x]_0^{L\sqrt{2}}$$

$$W_{déf} = \frac{P^2}{2EA} L + \frac{P^2}{EA} L\sqrt{2}$$

$$W_{déf} = \frac{P^2 L}{2EA} (1 + 2\sqrt{2})$$



2)

Appliquons la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_{vB} \quad W_{déf} = \frac{P^2 L}{2EA} (1 + 2\sqrt{2})$$

En identifiant :

$$\delta_{vB} = \frac{P L}{EA} (1 + 2\sqrt{2})$$

3)

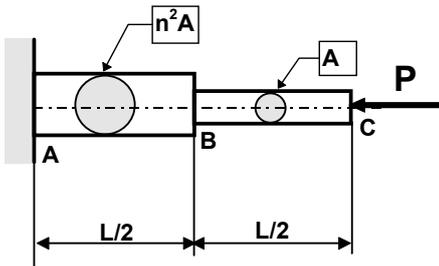
Non, car l'identification implique qu'une seule charge.

Application numérique : $P=30\text{kN}$, $L=2\text{m}$, $E=200\text{GPa}$ et $A=1\text{cm}^2$.

$$W_{déf} = \frac{P^2 L}{2EA} (1 + 2\sqrt{2}) = \frac{(10 \cdot 10^3)^2 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \times 200 \cdot 10^3 \times 100} (1 + 2\sqrt{2}) = 19142 \text{ Nmm} \quad W_{déf} = 19,142 \text{ J}$$

$$\delta_{vB} = \frac{P L}{EA} (1 + 2\sqrt{2}) = \frac{10 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \times 100} (1 + 2\sqrt{2}) = 3,828 \text{ mm} \quad \delta_{vB} = 3,83 \text{ mm}$$

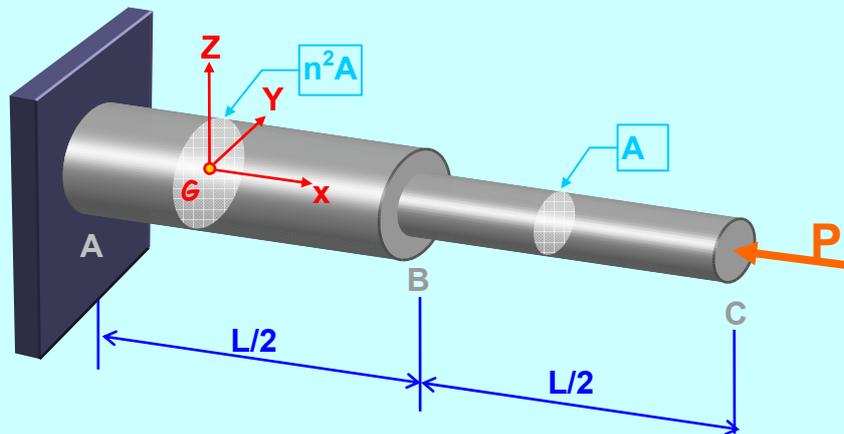
PROBLÈME N°2



1°) Déterminez l'expression de l'énergie de déformation élastique en fonction de P, L, A, E et n .

2°) En déduire l'expression du raccourcissement de la barre. Déterminer l'expression du raccourcissement de la barre pour $n=1$ et $n=2$.

RÉPONSES N°2



1)

La poutre ABC est soumise à de la compression pure :

$$N_x^{AB} = -P \quad N_x^{BC} = -P$$

$$W_{\text{déf}} = \int_A^B \left(\frac{N_x^{AB}}{2En^2 A} \right)^2 dx + \int_B^C \left(\frac{N_x^{BC}}{2EA} \right)^2 dx$$

$$W_{\text{déf}} = \int_0^{L/2} \left(\frac{N_x^{AB}}{2En^2 A} \right)^2 dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{N_x^{BC}}{2EA} \right)^2 dx = \int_0^{L/2} \left(\frac{-P}{2En^2 A} \right)^2 dx + \int_{L/2}^L \left(\frac{-P}{2EA} \right)^2 dx$$

$$W_{\text{déf}} = \frac{P^2}{2En^2 A} \int_0^{L/2} dx + \frac{P^2}{2EA} \int_{L/2}^L dx = \frac{P^2}{2En^2 A} [x]_0^{L/2} + \frac{P^2}{2EA} [x]_{L/2}^L = \frac{P^2 L}{4En^2 A} + \frac{P^2 L}{4EA}$$

$$W_{déf} = \frac{P^2 L}{4EA} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

2)

Appliquons la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$

Le déplacement associé à la charge P en C (δ_{hC}), est le raccourcissement de la barre ΔL :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \qquad W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_{hC}$$

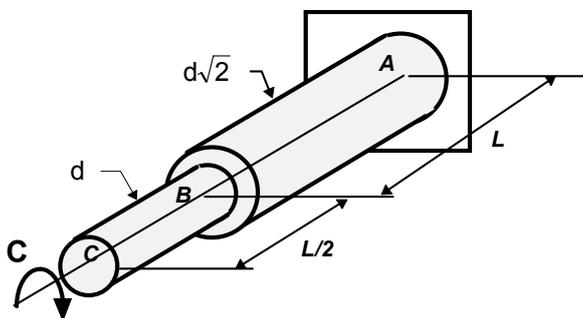
$$\frac{1}{2} P \delta_{hC} = \frac{P^2 L}{4EA} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \qquad \delta_{hC} = \frac{PL}{2EA} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Ce déplacement étant positif, il s'effectue dans le même sens que la charge . C'est donc bien un raccourcissement de la barre.

$$\Delta L = \frac{PL}{2EA} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Si } n=1 \qquad \Delta L = \frac{PL}{EA} \qquad \text{Si } n=2 \qquad \Delta L = \frac{5PL}{8EA}$$

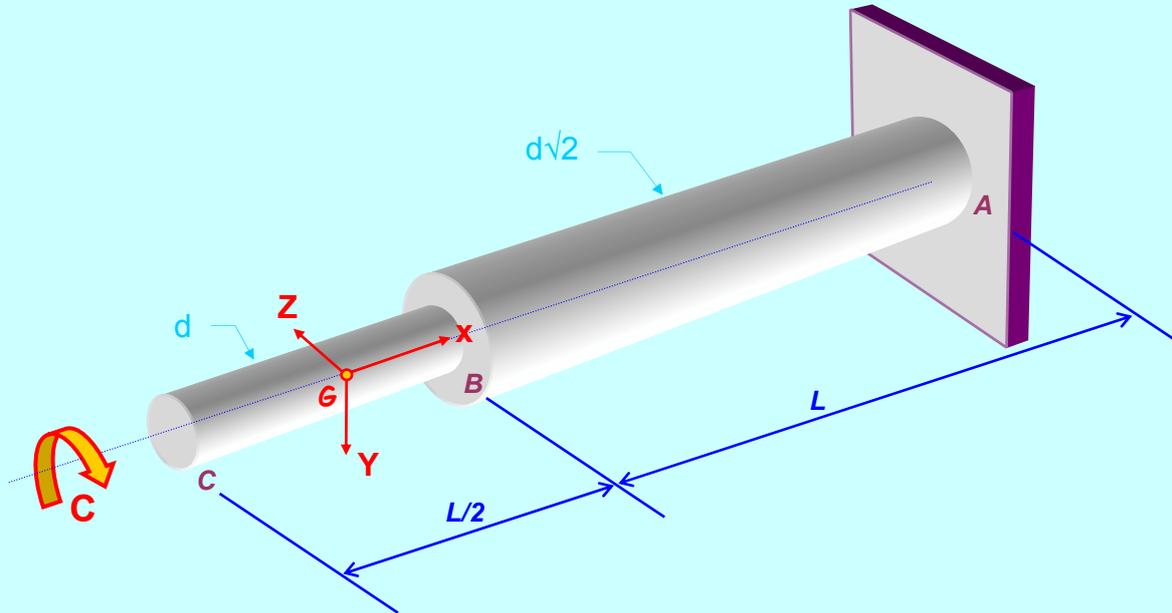
PROBLÈME N°3



1°) Déterminez l'expression de l'énergie de déformation élastique en fonction de C, L, G et d. En déduire l'expression de la rotation de la section droite C.

2°) L'énergie de déformation élastique admissible est de 12J, L=1m, d=40mm, G=80 GPa. Calculez la valeur du couple maximum admissible C (en Nm).et la valeur de la rotation de la section C (en °).

RÉPONSES N°3



1°)

Nous devons pour appliquer la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{def}$, calculer l'énergie de déformation emmagasinée dans la poutre ABC, et l'identifier avec le travail extérieur du au couple C.

Le déplacement associé au couple C en C (θ_x^C), est la rotation suivant l'axe du couple de la section C :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} PD \qquad W_{ext} = \frac{1}{2} C \theta_x^C$$

$$W_{def} = \sum_{barres} \int_0^L \left(\frac{N_x^2}{2EA} + \frac{T_y^2}{2GA} + \frac{T_z^2}{2GA} + \frac{M_x^2}{2GI_G} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right) dx$$

La poutre ABC est soumise à de la torsion pure : $M_x^{CB} = -C \quad M_x^{BA} = -C$

$$W_{def} = \int_C^A \left(\frac{M_x^2}{2GI_G^{CA}} \right) dx = \int_C^B \left(\frac{M_x^{CB}}{2GI_G^{CB}} \right)^2 dx + \int_B^A \left(\frac{M_x^{BA}}{2GI_G^{BA}} \right)^2 dx$$

$$W_{def} = \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{(-C)^2}{2GI_G^{CB}} \right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{(-C)^2}{2GI_G^{BA}} \right) dx = \frac{C^2}{2GI_G^{CB}} \int_0^{\frac{L}{2}} dx + \frac{C^2}{2GI_G^{BA}} \int_{\frac{L}{2}}^L dx$$

$$W_{def} = \frac{C^2 L}{4GI_G^{CB}} + \frac{C^2 L}{2GI_G^{BA}} = \frac{C^2 L}{2G} \left(\frac{1}{2I_G^{CB}} + \frac{1}{I_G^{BA}} \right) \qquad \text{avec } I_G^{CB} = \frac{\pi d^4}{32} \text{ et } I_G^{BA} = \frac{\pi (d\sqrt{2})^4}{32}$$

$$W_{déf} = \frac{12C^2L}{G\pi d^4}$$

$W_{ext} = \frac{1}{2}C\theta_x^C$ et $W_{déf} = \frac{12C^2L}{G\pi d^4}$, identifions les 2 expressions :

$$\theta_x^C = \frac{24CL}{G\pi d^4}$$

2°) Application numérique : $W_{déf}=12J$, $L=1m$, $d=40mm$, $G=80 GPa$

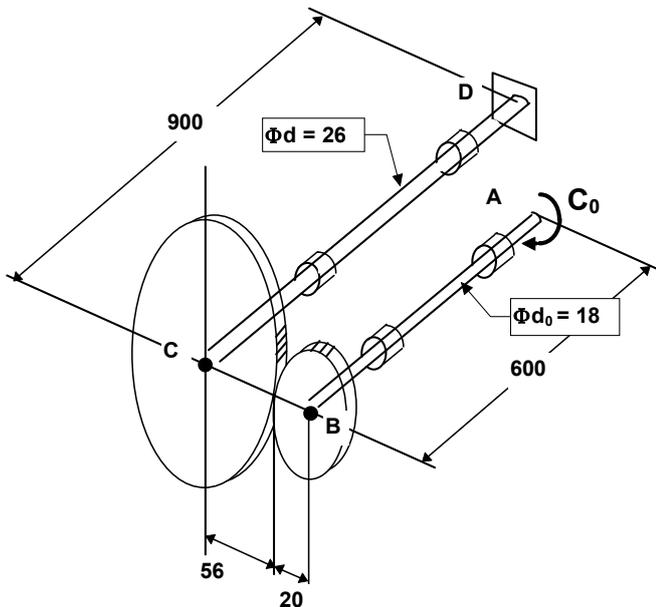
$$W_{déf} = \frac{12C^2L}{G\pi d^4} \Rightarrow C = \left(\frac{G\pi d^4 W_{déf}}{12L} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{80.10^3 \times \pi \times 40^4 \times 12.10^3}{12 \times 1000}} = 802121 Nmm$$

$$C=802,1 Nmm$$

$$\theta_x^C = \frac{24CL}{G\pi d^4} = \frac{24 \times 802121 \times 1000}{80.10^3 \times \pi \times 40^4} = 0,0299rd$$

$$\theta_x^C = 1^{\circ}71$$

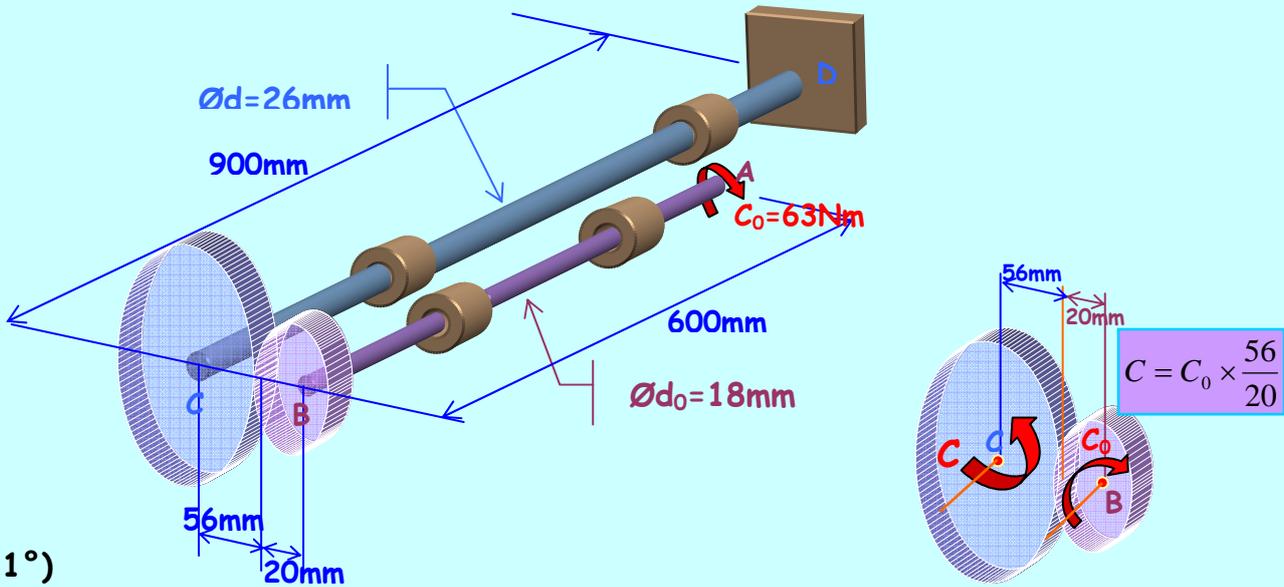
PROBLÈME N°4



En ne tenant compte que de l'énergie de déformation élastique due au moment de torsion et sachant que $C_0 = 63 Nm$, $G = 80 GPa$, calculez :

- 1°) L'énergie de déformation élastique (en J).
- 2°) La rotation de A (en d°).

RÉPONSES N°4



1°)

Les arbres AB et CD sont soumis à de la torsion pure : $M_x^{AB} = C_0$ $M_x^{CD} = C = C_0 \times \frac{56}{20}$

$$W_{déf} = \int_A^B \left(\frac{M_x^{AB}}{2GI_G^{AB}} \right)^2 dx + \int_C^D \left(\frac{M_x^{CD}}{2GI_G^{CD}} \right)^2 dx$$

$$W_{déf} = \int_0^{600} \left(\frac{C_0}{2GI_G^{AB}} \right)^2 dx + \int_0^{900} \left(\frac{C}{2GI_G^{CD}} \right)^2 dx = \frac{C_0^2}{2GI_G^{AB}} \int_0^{600} dx + \frac{C^2}{2GI_G^{CD}} \int_0^{900} dx$$

$$W_{déf} = \frac{300C_0^2}{GI_G^{AB}} + \frac{450C^2}{GI_G^{CD}} = \frac{300C_0^2}{GI_G^{AB}} + \frac{450 \times 56^2 \times C_0^2}{20^2 GI_G^{CD}} = \frac{C_0^2}{G} \left(\frac{300}{I_G^{AB}} + \frac{450 \times 56^2}{20^2 I_G^{CD}} \right)$$

$$W_{déf} = \frac{C_0^2}{G} \left(\frac{300}{I_G^{AB}} + \frac{450 \times 56^2}{20^2 I_G^{CD}} \right) = \frac{(63 \cdot 10^3)^2}{\pi \times 80 \cdot 10^3} \left(\frac{300 \times 32}{18^4} + \frac{450 \times 56^2 \times 32}{20^2 \times 26^4} \right) = 5345 \text{ Nmm}$$

$W_{déf} = 5,35 \text{ J}$

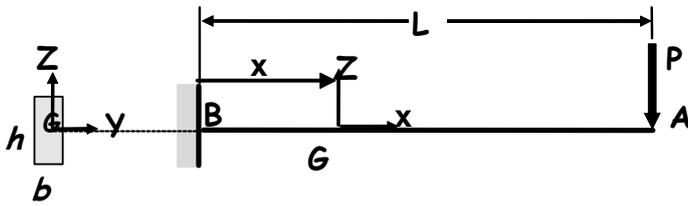
Le déplacement associé au couple C_0 en A (θ_x^A), est la rotation suivant l'axe du couple de la section A :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \quad \text{dans notre cas :} \quad W_{ext} = \frac{1}{2} C_0 \theta_x^A$$

Méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$ d'où : $\frac{1}{2} C_0 \theta_x^A = 5345 \text{ Nmm} \Rightarrow \theta_x^A = \frac{2 \times 5345}{63 \cdot 10^3} = 0,170 \text{ rd}$

$\theta_x^A = 9,72$

PROBLÈME N°5

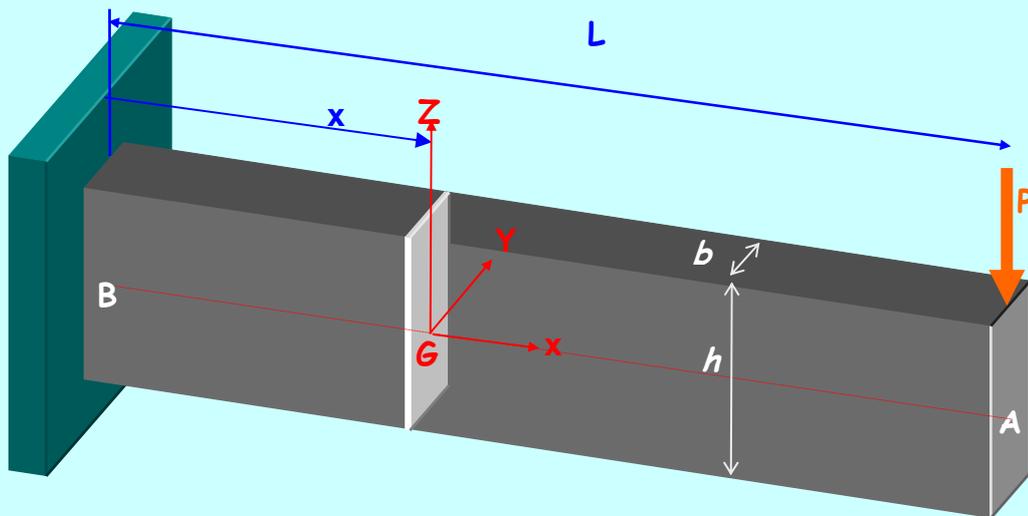


Déterminez l'expression littérale du déplacement vertical de A en prenant en compte le moment de flexion et l'effort tranchant.

Montrez que si $\nu = 0.3$ et $L/h = 10$ l'erreur commise en négligeant l'effort tranchant est inférieure à 1%.

tranchant est inférieure à 1%.

RÉPONSES N°5



Détermination du travail extérieur :

Le déplacement associé à la charge P en A (δ_v^A), est le déplacement vertical de la section A :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \qquad W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_v^A$$

Détermination de l'énergie de déformation :

$$W_{def} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{N_x^2}{2EA} + \frac{T_Y^2}{2GA} + \frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_x^2}{2GI_G} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} + \frac{M_Z^2}{2EI_Z} \right) dx$$

Nous devons chercher le Tenseur de Section en G de la barre AB : $\mathfrak{I}_{section_G} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P(L-X) \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_G$

La barre est donc soumise à un effort tranchant constant de B à A : $T_Z = -P$,
et à un moment de flexion linéaire : $M_Y = P(L-X)$

d'où :

$$W_{déf} = \int_0^L \left(\frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} \right) dx = \int_0^L \left(\frac{T_Z^2}{2GA} \right) dx + \int_0^L \left(\frac{M_Y^2}{2EI_Y} \right) dx = W_{déf}^{T_Z} + W_{déf}^{M_Y}$$

Calculons l'énergie de déformation due à l'effort tranchant :

$$W_{déf}^{T_Z} = \int_0^L \left(\frac{T_Z^2}{2GA} \right) dx = \int_0^L \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{P^2}{2GA} \int_0^L dx = \frac{P^2}{2GA} [x]_0^L = \frac{P^2 L}{2GA}$$

Puis l'énergie de déformation due au moment fléchissant :

$$W_{déf}^{M_Y} = \int_0^L \left(\frac{M_Y^2}{2EI_Y} \right) dx = \int_0^L \frac{(P(L-x))^2}{2EI_Y} dx = \frac{P^2}{2EI_Y} \int_0^L (L-x)^2 dx = \frac{P}{2EI_Y} \left[\frac{(L-x)^3}{3} \right]_0^L = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y}$$

D'où :

$$W_{déf} = W_{déf}^{T_Z} + W_{déf}^{M_Y} = \frac{P^2 L}{2GA} + \frac{P^2 L^3}{6EI_Y}$$

Application numérique : si $\nu = 0.3$ et $L/h = 10$

$$W_{déf} = \frac{P^2 L}{2GA} + \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} = \frac{P^2 L}{2I_Y} \left(\frac{I_Y}{GA} + \frac{L^2}{3E} \right) \quad \text{or} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$W_{déf} = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} \left(1 + \frac{(1+\nu)}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) \quad W_{déf} = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} \left(1 + \frac{(1+0,3)}{2} (0,1)^2 \right)$$

$$W_{déf} = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} (1 + 6,5 \cdot 10^{-3}) = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} (1 + 0,65 \cdot 10^{-2}) = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} \left(1 + \frac{0,65}{100} \right)$$

Conclusion :

$$W_{déf}^{M_Y} = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} \quad \text{et} \quad W_{déf}^{T_Z} = \frac{P^2 L^3}{6EI_Y} \times \frac{0,65}{100}$$

L'énergie de déformation due à l'effort tranchant, ne représente que moins de 1 % de l'énergie de déformation totale.

Nous en concluons que l'énergie de déformation due à l'effort tranchant est en règle générale négligeable par rapport à l'énergie de déformation due au moment de flexion.

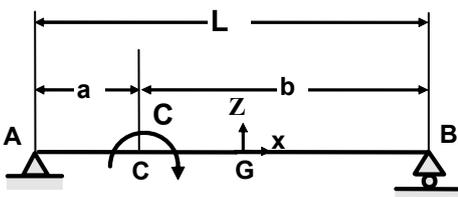
Expression littérale du déplacement vertical de A

Appliquons la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_v^A \text{ et } W_{déf} = \frac{P^2 L^3}{6EI_y} \left(1 + \frac{0,65}{100} \right) \quad \text{En identifiant : } \delta_v^A = \frac{PL^3}{3EI_y} \left(1 + \frac{0,65}{100} \right)$$

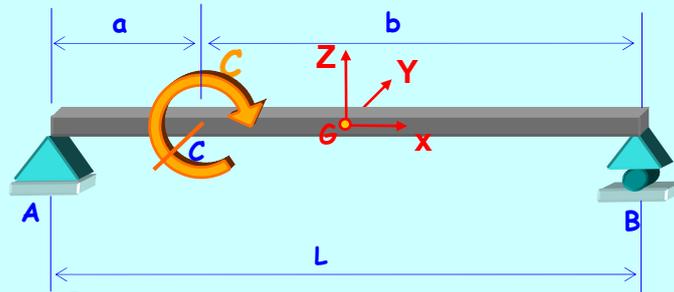
La flèche due à l'effort tranchant ne représente que 0,65% du déplacement vertical de la section A.

PROBLÈME N°6

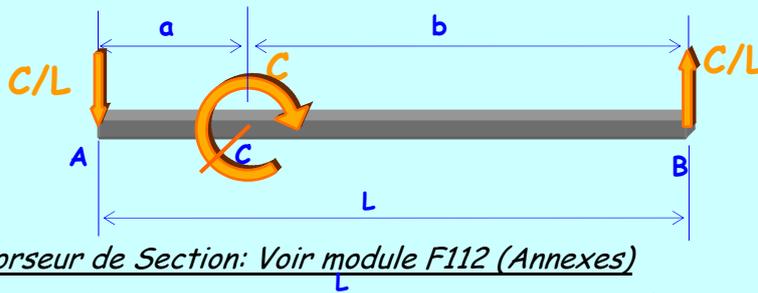


Déterminez en ne tenant compte que du moment fléchissant l'expression littérale de la rotation de la section droite C en fonction de C, L, a, b, E et I_y .

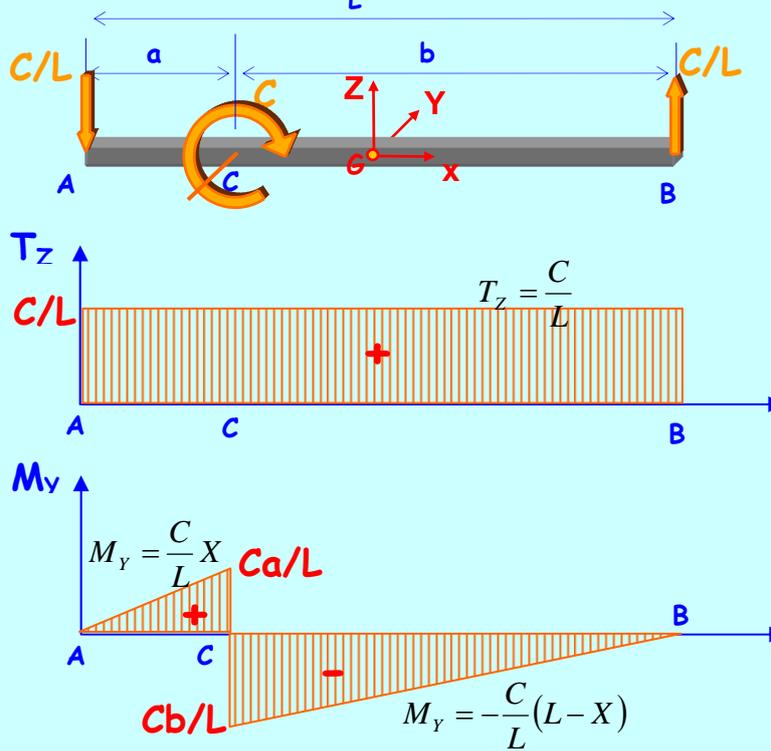
RÉPONSES N°6



Détermination du Torseur Externe: Voir module F112



Détermination du Torseur de Section: Voir module F112 (Annexes)



Détermination du travail extérieur :

Le déplacement associé au couple C en C (θ_Y^C), est la rotation suivant l'axe du couple de la section C :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \qquad W_{ext} = \frac{1}{2} C \theta_Y^C$$

Détermination de l'énergie de déformation :

$$W_{déf} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{N_X^2}{2EA} + \frac{T_Y^2}{2GA} + \frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_X^2}{2GI_G} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} + \frac{M_Z^2}{2EI_Z} \right) dx \quad W_{déf} = \int_A^B \left(\frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} \right) dx$$

Nous devons négliger l'énergie de déformation due à l'effort tranchant par rapport celle emmagasinée par la flexion :

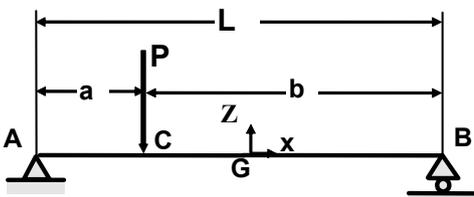
$$W_{déf} = \int_A^B \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx$$

$$W_{déf} = \int_A^C \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx + \int_C^B \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx = \int_A^C \frac{\left(\frac{C}{L} X \right)^2}{2EI_Y} dx + \int_C^B \frac{\left(-\frac{C}{L} (L-X) \right)^2}{2EI_Y} dx$$

$$W_{déf} = \frac{C^2}{2EI_Y L^2} \left(\int_0^a X^2 dx + \int_a^L (L-X)^2 dx \right) = \frac{C^2}{2EI_Y L^2} \left(\left[\frac{X^3}{3} \right]_0^a + \left[\frac{(L-X)^3}{3} \right]_a^L \right) = \frac{C^2(a^3 + b^3)}{6EI_Y L^2}$$

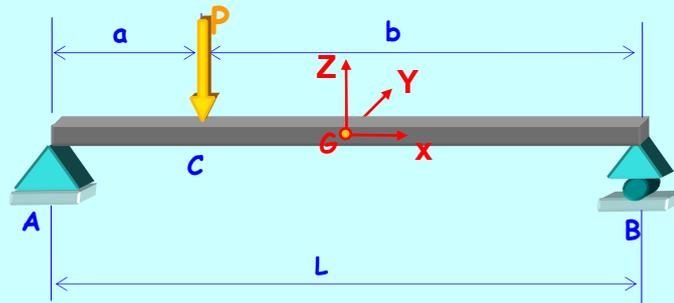
Appliquons la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} C \theta_Y^C \quad \text{et} \quad W_{déf} = \frac{C^2(a^3 + b^3)}{6EI_Y L^2} \quad \text{En identifiant :} \quad \theta_Y^C = \frac{C(a^3 + b^3)}{3EI_Y L^2}$$

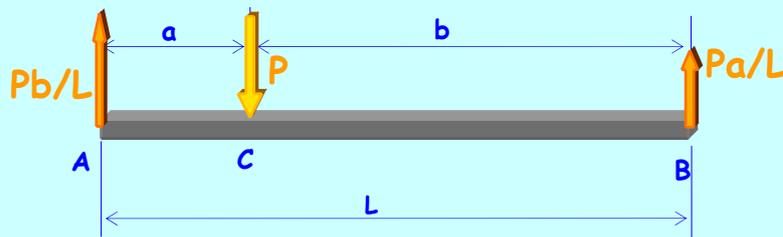
PROBLÈME N°7

Déterminez en ne tenant compte que du moment fléchissant l'expression littérale de la flèche verticale de la section droite C en fonction de P, L, a, b, E et I_y .

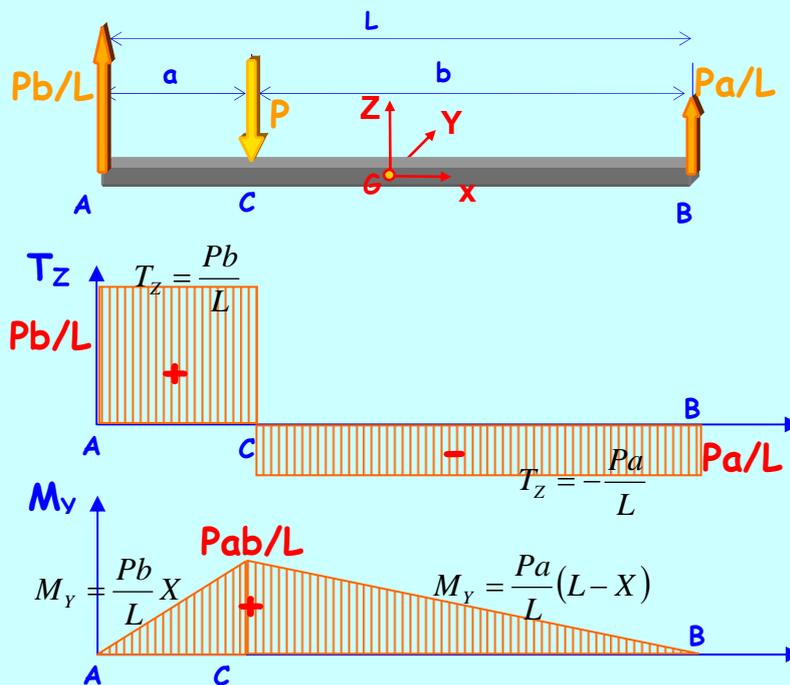
RÉPONSES N°7



Détermination du Torseur Externe: Voir module F112



Détermination du Torseur de Section: Voir module F112 (Annexes)



Détermination du travail extérieur :

Le déplacement associé à la charge P en C (δ_v^C), est le déplacement vertical de la section A :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P D \qquad W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_v^C$$

Détermination de l'énergie de déformation :

$$W_{déf} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{N_X^2}{2EA} + \frac{T_Y^2}{2GA} + \frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_X^2}{2GI_G} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} + \frac{M_Z^2}{2EI_Z} \right) dx \quad W_{déf} = \int_A^B \left(\frac{T_Z^2}{2GA} + \frac{M_Y^2}{2EI_Y} \right) dx$$

Nous devons négliger l'énergie de déformation due à l'effort tranchant par rapport celle emmagasinée par la flexion :

$$W_{déf} = \int_A^B \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx$$

$$W_{déf} = \int_A^C \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx + \int_C^B \frac{M_Y^2}{2EI_Y} dx = \int_A^C \frac{\left(\frac{Pb}{L} X \right)^2}{2EI_Y} dx + \int_C^B \frac{\left(\frac{Pa}{L} (L-X) \right)^2}{2EI_Y} dx$$

$$W_{déf} = \frac{P^2}{2EI_Y L^2} \left(b^2 \int_0^a X^2 dx + a^2 \int_a^L (L-X)^2 dx \right) = \frac{P^2}{2EI_Y L^2} \left(b^2 \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^a + a^2 \left[\frac{(L-X)^3}{3} \right]_a^L \right)$$

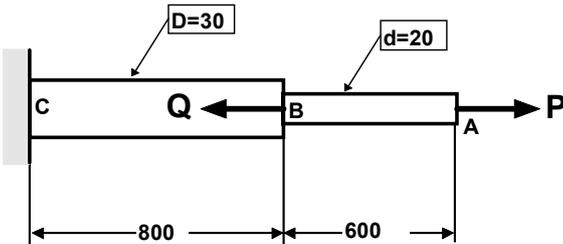
$$W_{déf} = \frac{P^2 (b^2 a^3 + a^2 b^3)}{6EI_Y L^2} = \frac{P^2 b^2 a^2 (a+b)}{6EI_Y L^2} = \frac{P^2 b^2 a^2 L}{6EI_Y L^2} \quad W_{déf} = \frac{P^2 b^2 a^2}{6EI_Y L}$$

Appliquons la méthode de Clapeyron : $W_{ext} = W_{déf}$

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P \delta_v^C \quad \text{et} \quad W_{déf} = \frac{P^2 b^2 a^2}{6EI_Y L} \quad \text{En identifiant :} \quad \delta_v^C = \frac{Pb^2 a^2}{3EI_Y L}$$

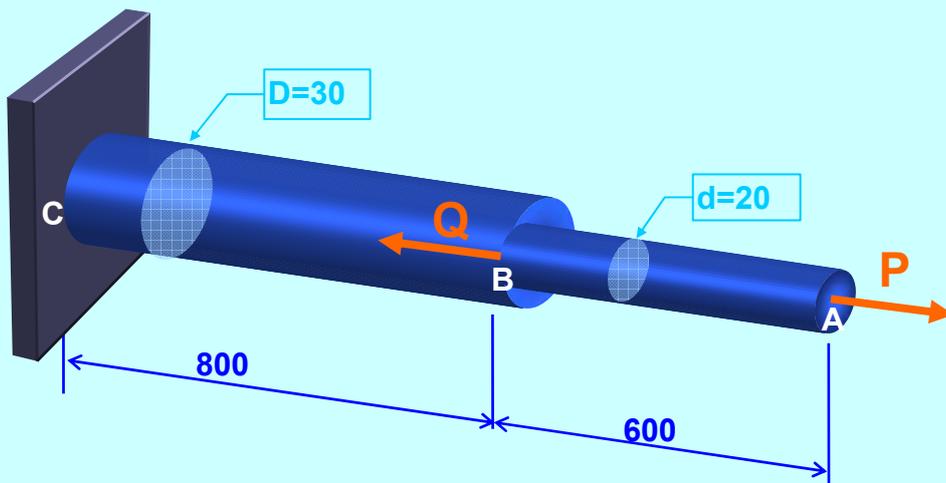
2. MÉTHODE DE MAXWELL-MOHR ET DE CASTIGLIANO

PROBLÈME N°8

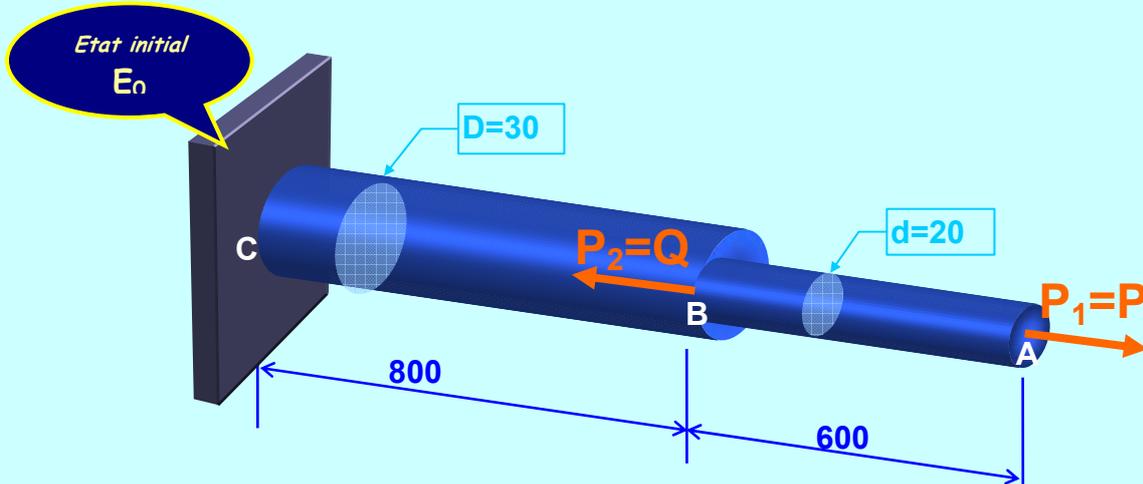


En appliquant la méthode de MAXWELL-MOHR calculer les déplacements de A et de B.
On donne : $P = 30 \text{ kN}$, $Q = 150 \text{ kN}$, $E = 70 \text{ GPa}$.

RÉPONSES N°8



Considérons l'état initial E_0 , et utilisons la notation charges généralisées P_i et déplacements généralisés associés D_i :



Le déplacement généralisé D_1 associé à la charge généralisée P_1 est le déplacement linéique dans la direction de P_1 de la section A.

Le déplacement généralisé D_2 associé à la charge généralisée P_2 est le déplacement linéique dans la direction de P_2 de la section B.

$$[D] = [f][P] \text{ ou } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = f_{11}P_1 + f_{12}P_2$$

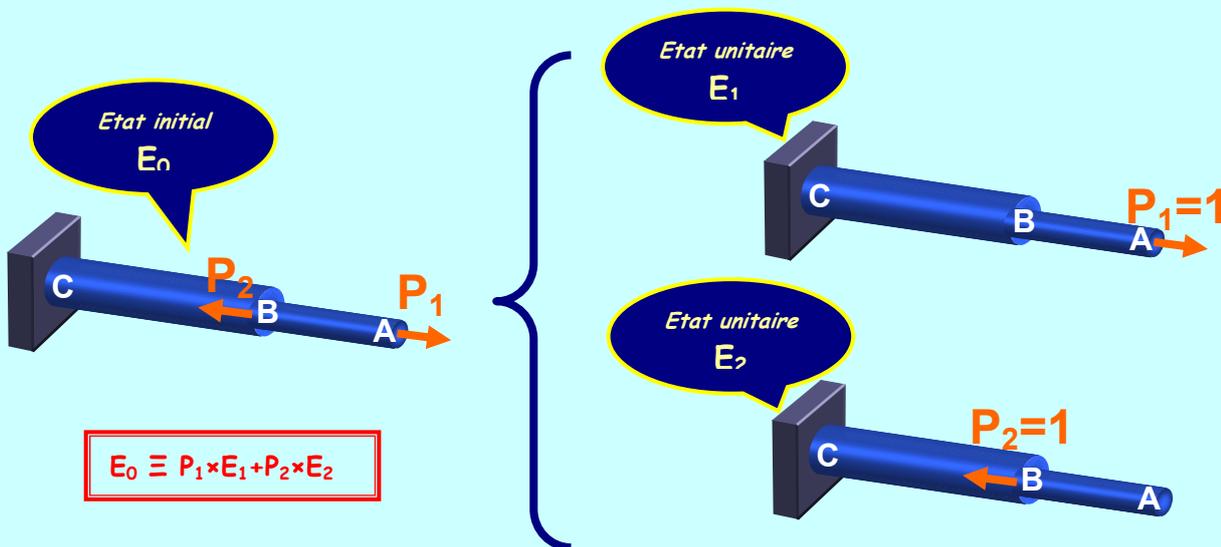
$$D_2 = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$$

La matrice carrée $[f]$ est la matrice de flexibilité de la structure.

Chaque coefficient d'influence f_{ij} est calculé par le théorème de Maxwell-Mohr

$$f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} + \frac{(t_y)_i (t_y)_j}{GA} + \frac{(t_z)_i (t_z)_j}{GA} + \frac{(m_x)_i (m_x)_j}{GI_x} + \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} + \frac{(m_z)_i (m_z)_j}{EI_z} \right) dx$$

Pour les déterminer nous devons décomposer l'état initial E_0 , en deux états unitaires E_1 et E_2



La poutre ABC, dans les 3 états E_0 , E_1 et E_2 n'est soumise qu'à des efforts normaux :

$$f_{ij} = \int_C^A \frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} dx$$

$$f_{ij} = \int_C^A \frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} dx = \int_C^B \frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA_{CB}} dx + \int_B^A \frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA_{BA}} dx$$

Pour calculer les f_{ij} , nous devons chercher les diagrammes des efforts normaux dans les deux états unitaires :

Etat unitaire E_1

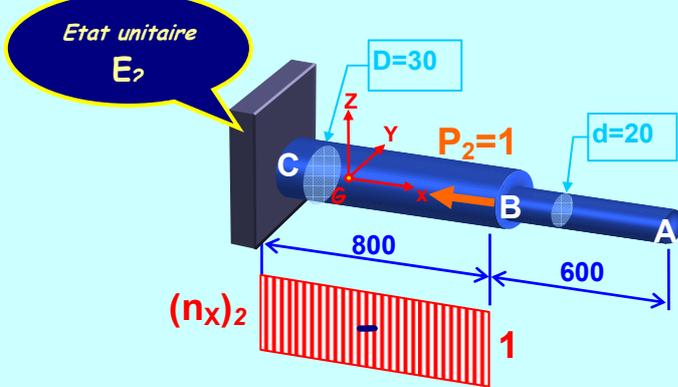
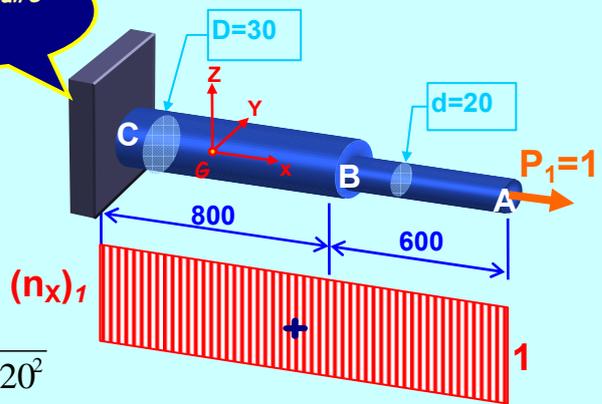
$$f_{11} = \int_0^{800} \frac{(n_x)_1 (n_x)_1}{EA_{CB}} dx + \int_{800}^{1400} \frac{(n_x)_1 (n_x)_1}{EA_{BA}} dx$$

$$f_{11} = \int_0^{800} \frac{1 \times 1}{EA_{CB}} dx + \int_{800}^{1400} \frac{1 \times 1}{EA_{BA}} dx$$

$$f_{11} = \frac{1}{EA_{CB}} \int_0^{800} dx + \frac{1}{EA_{BA}} \int_{800}^{1400} dx$$

$$f_{11} = \frac{800}{EA_{CB}} + \frac{600}{EA_{BA}} = \frac{800 \times 4}{70 \cdot 10^3 \times \pi \times 30^2} + \frac{600 \times 4}{70 \cdot 10^3 \times \pi \times 20^2}$$

$$f_{11} = 4,345 \cdot 10^{-5}$$



$$f_{22} = \int_0^{800} \frac{(n_x)_2 (n_x)_2}{EA_{CB}} dx + \int_{800}^{1400} \frac{(0)_2 (0)_2}{EA_{BA}} dx$$

$$f_{22} = \int_0^{800} \frac{(-1)_2 (-1)_2}{EA_{CB}} dx$$

$$f_{22} = \frac{800}{EA_{CB}} = \frac{800 \times 4}{70 \cdot 10^3 \times \pi \times 30^2}$$

$$f_{22} = 1,616 \cdot 10^{-5}$$

$$f_{12} = \int_0^{800} \frac{(n_x)_1 (n_x)_2}{EA_{CB}} dx + \int_{800}^{1400} \frac{(n_x)_1 (0)_2}{EA_{BA}} dx$$

$$f_{12} = \int_0^{800} \frac{(+1)_2 (-1)_2}{EA_{CB}} dx$$

$$f_{12} = -\frac{800}{EA_{CB}} = -\frac{800 \times 4}{70 \cdot 10^3 \times \pi \times 30^2}$$

$$f_{12} = -1,616 \cdot 10^{-5}$$

Matrice de flexibilité :

$$[f] = 10^{-5} \begin{bmatrix} 4,345 & -1,616 \\ -1,616 & 1,616 \end{bmatrix} mmN^{-1}$$

Nous en déduisons la matrice des déplacements généralisés :

$$[D] = [f][P] \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 4,345 & -1,616 \\ -1,616 & 1,616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 150 \end{bmatrix} 10^3$$

$$D_1 = 4,345 \cdot 10^{-5} \times 30 \cdot 10^3 - 1,616 \cdot 10^{-5} \times 150 \cdot 10^3 = -1,12 mm$$

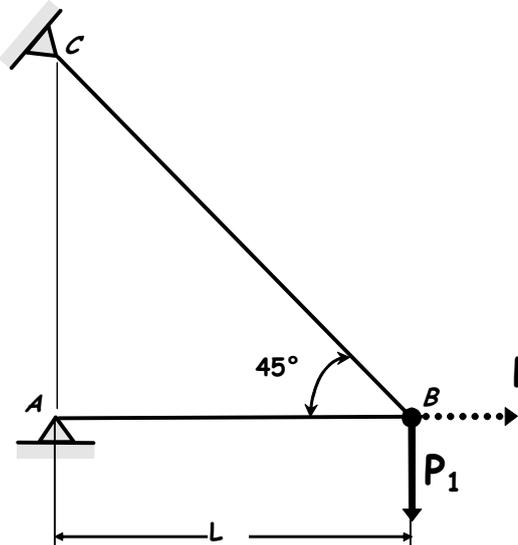
$$D_2 = -1,616 \cdot 10^{-5} \times 30 \cdot 10^3 + 1,616 \cdot 10^{-5} \times 150 \cdot 10^3 = 1,94 mm$$

D_1 est négatif : le déplacement de la section A s'effectue en sens inverse de celui de l'application de la charge P_1 . $\delta_A = -1,12 mm$

D_2 est positif : le déplacement de la section B s'effectue dans le même sens que celui de l'application de la charge P_2 . $\delta_B = 1,94 mm$

PROBLÈME N°9

Ce problème est le même que le problème 1 qui a été résolu partiellement par la méthode de CLAPEYRON.



Les barres AB et BC (de même section droite A et de même matériau) sont articulées en A, B et C. Une force verticale P_1 est appliquée en B. On veut calculer le déplacement vertical **et le déplacement horizontal** du point B par la méthode de MAXWELL-MOHR.

Suggestion : Rajoutez en B une force horizontale fictive P_2 pour calculer le déplacement horizontal.

- P_2
- 1°) Déterminer l'expression littérale de la matrice de flexibilité de la structure (mettre L/EA en facteur).
 - 2°) En déduire l'expression littérale du déplacement vertical et du déplacement horizontal du point B.

Application numérique : $P_1=10\text{kN}$, $L=2\text{m}$, $E=200\text{GPa}$ et $A=1\text{cm}^2$. Calculez la valeur du déplacement vertical et du déplacement horizontal du point B (en mm).

RÉPONSES N°9

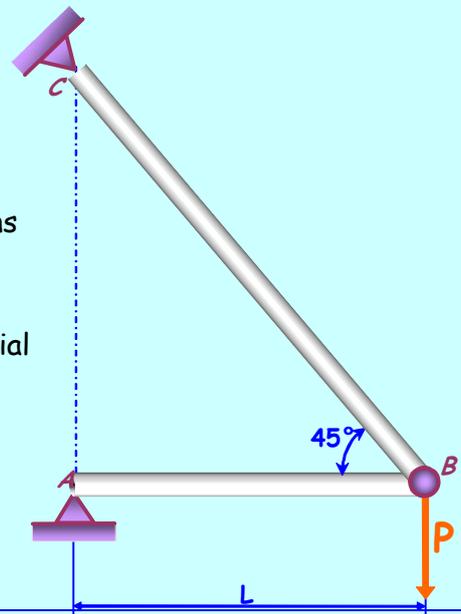
La méthode de Maxwell Mohr ou méthode de la charge unité ne permet de calculer que les déplacements des points d'applications des charges généralisées

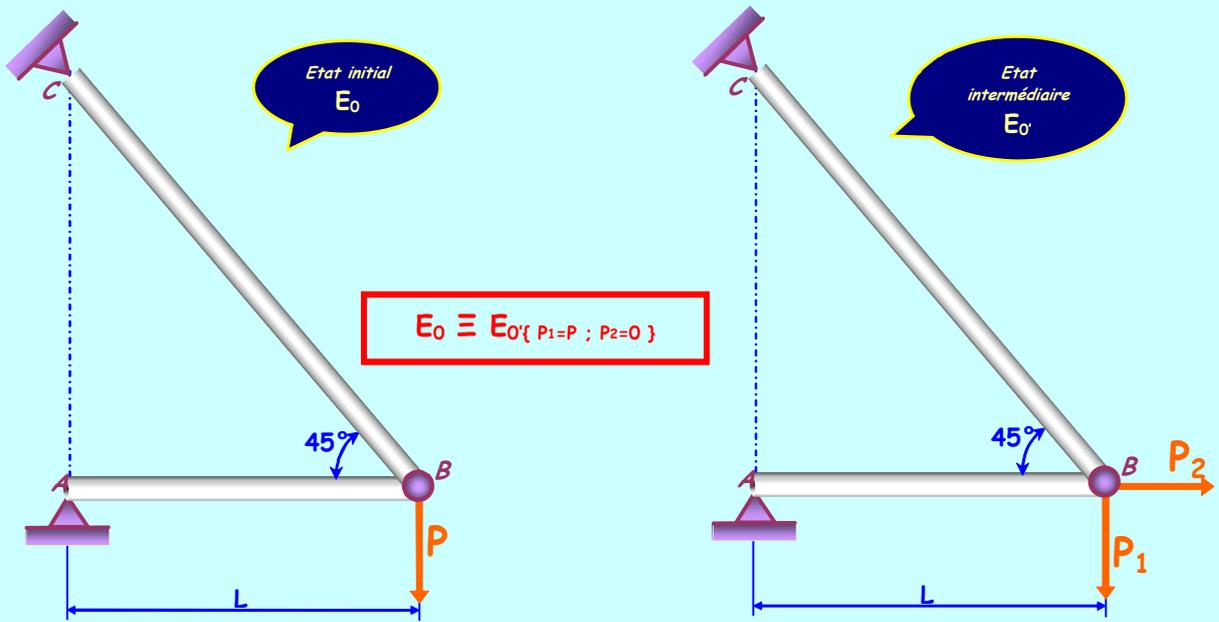
Sur le problème initial qui nous est proposé, nous ne pouvons donc déterminer que le déplacement vertical du point B.

Nous allons donc créer un problème plus général, dont l'initial ne sera qu'un cas particulier.

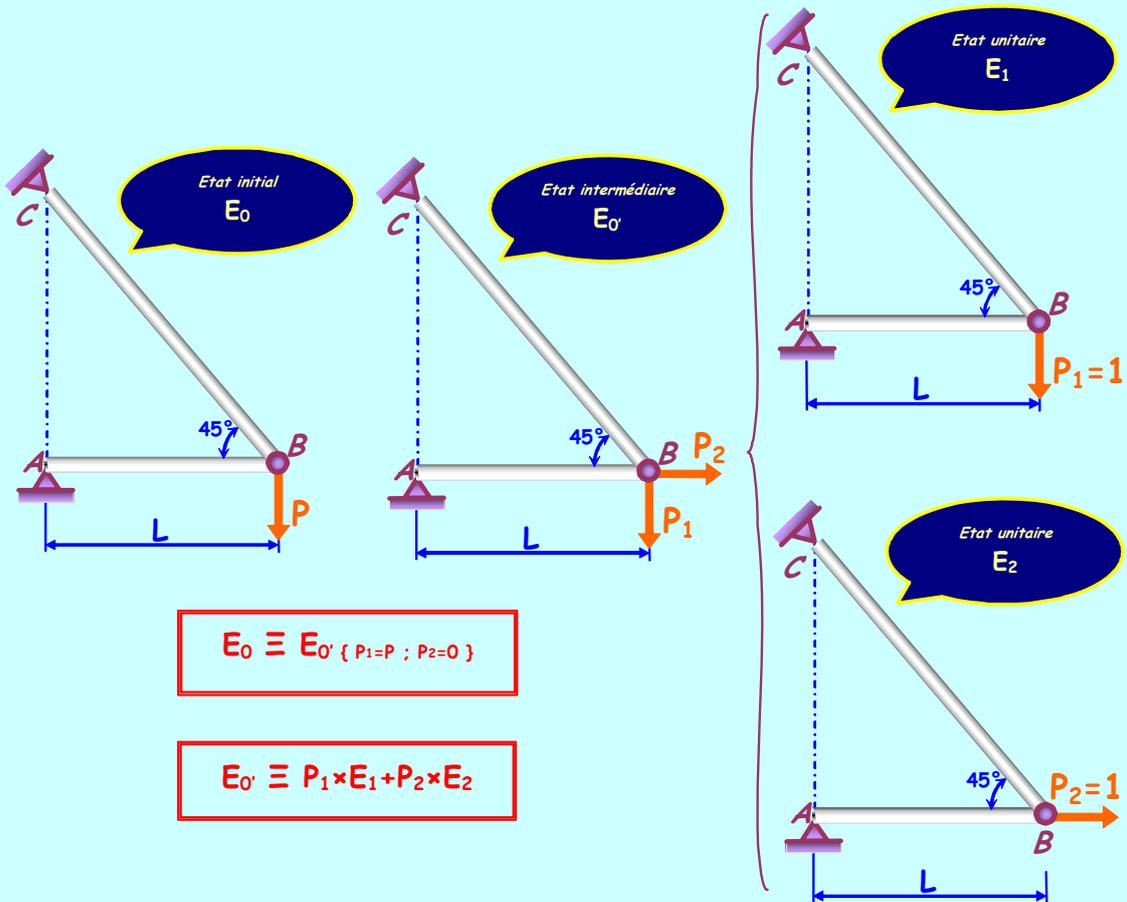
Nous désirons connaître le déplacement horizontal de la section B. Il est donc nécessaire qu'il existe en B une charge horizontale.

Appliquons alors en B une charge « fictive » P_2 :





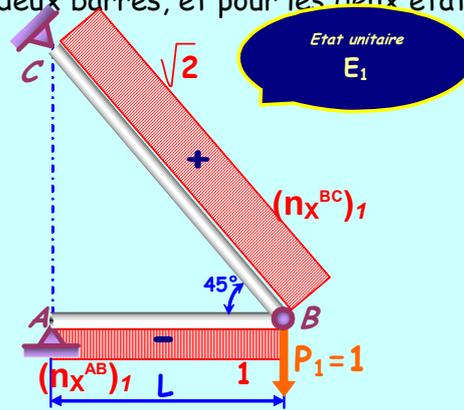
Nous allons donc travailler sur l'état $E_{0'}$. Décomposons ce dernier en deux états unitaires E_1 et E_2 .



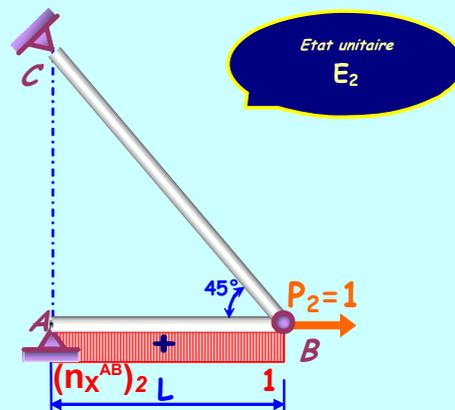
1°) Expression littérale de la matrice de flexibilité de la structure :

Cherchons les efforts normaux s'exerçant sur les deux barres, et pour les deux états unitaires.

$$\text{Etat 1} \mapsto \begin{cases} (n_x^{AB})_1 = -1 \\ (n_x^{BC})_1 = +\sqrt{2} \end{cases}$$



$$\text{Etat 2} \mapsto \begin{cases} (n_x^{AB})_2 = +1 \\ (n_x^{BC})_2 = 0 \end{cases}$$



Chaque coefficient d'influence f_{ij} est calculé par le théorème de Maxwell-Mohr

$$f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} + \frac{(t_y)_i (t_y)_j}{GA} + \frac{(t_z)_i (t_z)_j}{GA} + \frac{(m_x)_i (m_x)_j}{GI_G} + \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} + \frac{(m_z)_i (m_z)_j}{EI_z} \right) dx$$

Dans notre cas :

$$f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} \right) dx = \int_A^B \frac{(n_x^{AB})_i (n_x^{AB})_j}{EA} dx + \int_B^C \frac{(n_x^{BC})_i (n_x^{BC})_j}{EA} dx = \int_0^L \frac{(n_x^{AB})_i (n_x^{AB})_j}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(n_x^{BC})_i (n_x^{BC})_j}{EA} dx$$

$$f_{11} = \int_0^L \frac{(n_x^{AB})_1 (n_x^{AB})_1}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(n_x^{BC})_1 (n_x^{BC})_1}{EA} dx = \int_0^L \frac{(-1)_1 (-1)_1}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2})_1 (\sqrt{2})_1}{EA} dx = \frac{L}{EA} (1 + 2\sqrt{2})$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{(n_x^{AB})_2 (n_x^{AB})_2}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(n_x^{BC})_2 (n_x^{BC})_2}{EA} dx = \int_0^L \frac{(+1)_2 (+1)_2}{EA} dx = \frac{L}{EA}$$

$$f_{12} = \int_0^L \frac{(n_x^{AB})_1 (n_x^{AB})_2}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(n_x^{BC})_1 (n_x^{BC})_2}{EA} dx = \int_0^L \frac{(-1)_1 (+1)_2}{EA} dx + \int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2})_1 (0)_2}{EA} dx = -\frac{L}{EA}$$

$$[f] = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} (1 + 2\sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2°) Expression littérale du déplacement vertical et du déplacement horizontal du point B :

$$\text{Dans l'état } E_0 \quad [D]_{E_0} = [f]_{E_0} [P]_{E_0} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \delta_v^B \\ \delta_h^B \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} (1+2\sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$$

$$\text{Dans l'état } E_0 \quad \begin{bmatrix} \delta_v^B \\ \delta_h^B \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} (1+2\sqrt{2}) & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} (1+2\sqrt{2}) \\ -1 \end{bmatrix}$$

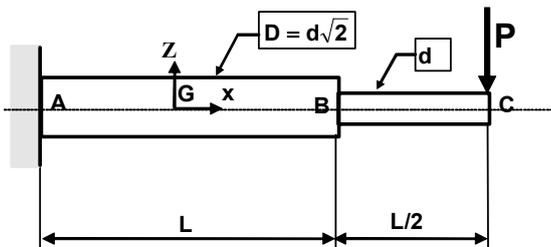
Application numérique : $P_1=10\text{kN}$, $L=2\text{m}$, $E=200\text{GPa}$ et $A=1\text{cm}^2$.

$$\delta_v^B = \frac{PL}{EA} (1+2\sqrt{2}) = \frac{10 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \times 100} (1+2\sqrt{2}) = 3,828\text{mm} \quad \delta_v^B = 3,83 \text{ mm}$$

$$\delta_h^B = -\frac{PL}{EA} = -\frac{10 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \times 100} = -1\text{mm} \quad \delta_h^B = -1 \text{ mm}$$

Le déplacement horizontal de B s'effectue en sens inverse de la charge « fictive » P_2

PROBLÈME N°10



En appliquant la méthode de MAXWELL-MOHR et en ne tenant compte que de l'énergie de déformation élastique due au moment fléchissant, déterminez en fonction de P , L , E et d l'expression littérale du déplacement vertical et de la rotation en C . En déduire l'expression littérale de l'énergie de déformation.

Application numérique : $P=1425\text{N}$, $E=210\text{GPa}$, $L=1\text{m}$, et $d=40\text{mm}$. Calculez $W_{\text{déf}}$ en Joules.

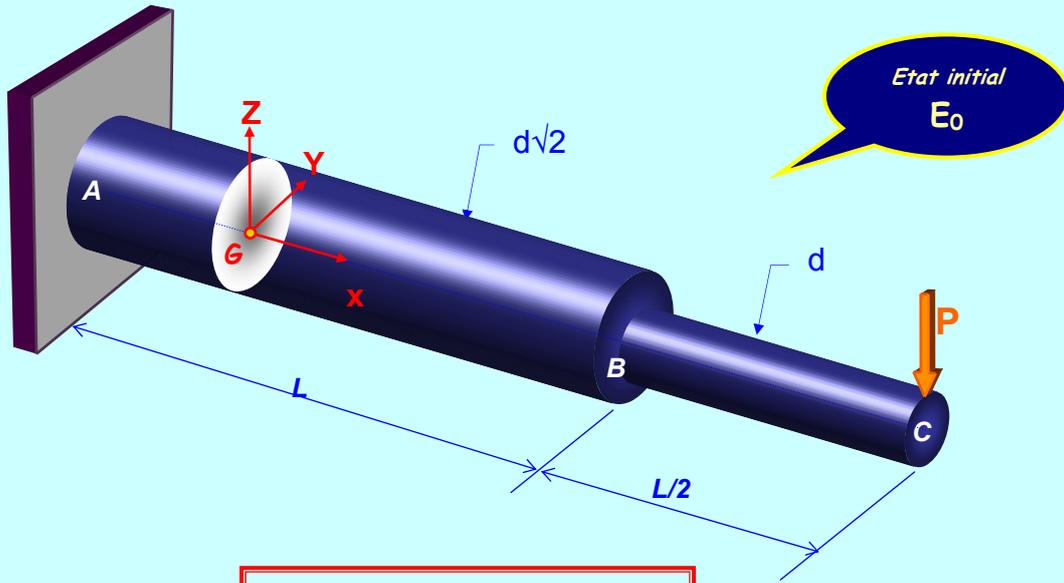
RÉPONSES N°10

Sur le problème qui nous est proposé, nous ne pouvons déterminer que le déplacement vertical de la section C .

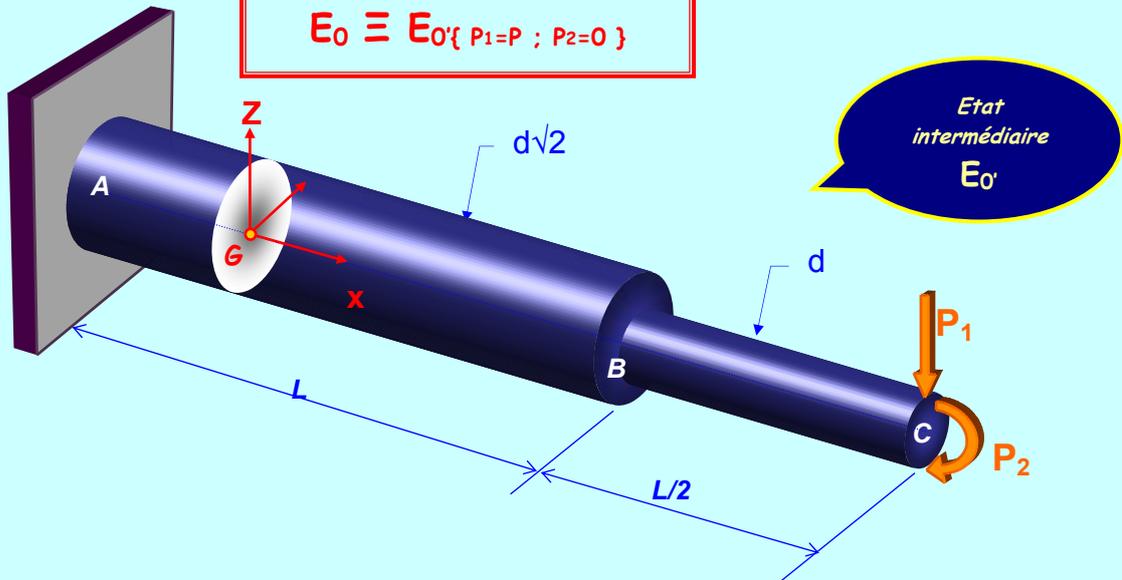
Nous allons donc créer un problème plus général, dont l'initial ne sera qu'un cas particulier.

Nous désirons connaître la rotation de la section C . Il est donc nécessaire qu'il existe en C un moment « fictif » porté par l'axe de la rotation cherchée .

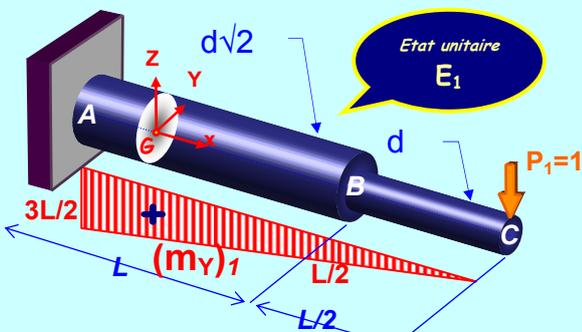
Appliquons alors en C un moment « fictif » P_2 suivant l'axe Y :



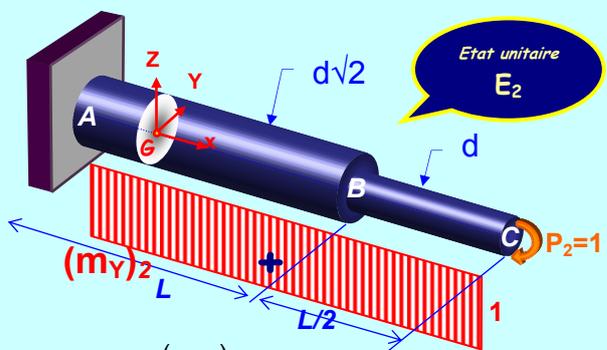
$$E_0 \equiv E_0\{ P_1=P ; P_2=0 \}$$



Constituons deux états unitaires de l'état E_0' et cherchons en les diagrammes des moments:



$$(m_y)_1 = \frac{3L}{2} - X$$



$$(m_y)_2 = +1$$

$$E_0' \equiv P_1 \times E_1 + P_2 \times E_2$$

Chaque coefficient d'influence f_{ij} est calculé par le théorème de Maxwell-Mohr

$$f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} + \frac{(t_y)_i (t_y)_j}{GA} + \frac{(t_z)_i (t_z)_j}{GA} + \frac{(m_x)_i (m_x)_j}{GI_G} + \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} + \frac{(m_z)_i (m_z)_j}{EI_z} \right) dx$$

Dans notre cas nous ne tenons compte que de l'énergie de déformation due au moment m_y :

$$f_{ij} = \int_A^C \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} dx$$

Compte tenu de la discontinuité de section en B : $f_{ij} = \int_A^B \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y^{AB}} dx + \int_B^C \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y^{BC}} dx$

Calcul de f_{11} :

$$f_{11} = \int_0^L \frac{\left(\frac{3L}{2} - X\right)_1 \left(\frac{3L}{2} - X\right)_1}{EI_y^{AB}} dx + \int_L^{\frac{3L}{2}} \frac{\left(\frac{3L}{2} - X\right)_1 \left(\frac{3L}{2} - X\right)_1}{EI_y^{BC}} dx$$

Utilisons le tableau des Intégrales de Mohr pour calculer ces intégrales :

En notation « symbolique » : $f_{11} = 1/EI_y^{AB} \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{3L/2}{L} \right) \right]^2 + 1/EI_y^{BC} \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{L/2}{L/2} \right) \right]^2$

Or $I_y^{AB} = \frac{\pi d^4}{16}$ et $I_y^{BC} = \frac{\pi d^4}{64}$

$$f_{11} = 16/E\pi d^4 \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{3L/2}{L} \right) \right]^2 + 64/E\pi d^4 \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{L/2}{L/2} \right) \right]^2$$

$$f_{11} = \frac{16}{E\pi d^4} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3L}{2} \right)^2 + \frac{3L}{2} \times \frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] L + 4 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{L}{2} \right] \right\}$$

$$f_{11} = \frac{20 L^3}{E \pi d^4}$$

Calcul de f_{12} :

$$f_{12} = \int_0^L \frac{\left(\frac{3L}{2} - X\right)_1 (+1)_2}{EI_y^{AB}} dx + \int_L^{\frac{3L}{2}} \frac{\left(\frac{3L}{2} - X\right)_1 (+1)_2}{EI_y^{BC}} dx$$

$$f_{12} = 16/E\pi d^4 \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{3L/2}{L} \right) \times \text{Diagramme constant } \left(\frac{1}{L} \right) \right] + 64/E\pi d^4 \left[\text{Diagramme triangulaire } \left(\frac{L/2}{L/2} \right) \times \text{Diagramme constant } \left(\frac{1}{L/2} \right) \right]$$

$$f_{12} = \frac{16}{E\pi d^4} \left\{ \frac{1}{2} \times 1 \times \left[\left(\frac{3L}{2} \right) + \frac{L}{2} \right] L + 4 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \left(1 \right) \frac{L}{2} \right] \right\}$$

$$f_{12} = \frac{24L^2}{E\pi d^4}$$

Expression littérale du déplacement vertical C.

$$\text{Dans l'état } E_0' \quad [D]_{E_0'} = [f]_{E_0'} [P]_{E_0'} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \theta_Y^C \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0'}$$

$$\text{Dans l'état } E_0 \quad \begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \theta_Y^C \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0}$$

$$\delta_v^C = f_{11} P = \frac{20 PL^3}{E \pi d^4} \quad \delta_v^C = 20PL^3 / E\pi d^4$$

Expression littérale de la rotation en C.

$$\text{Dans l'état } E_0' \quad [D]_{E_0'} = [f]_{E_0'} [P]_{E_0'} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \theta_Y^C \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0'}$$

$$\text{Dans l'état } E_0 \quad \begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \theta_Y^C \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0}$$

$$\theta_Y^C = f_{21} P = \frac{24PL^2}{E\pi d^4} \quad \theta_Y^C = 24PL^2 / E\pi d^4$$

Expression littérale de l'énergie de déformation.

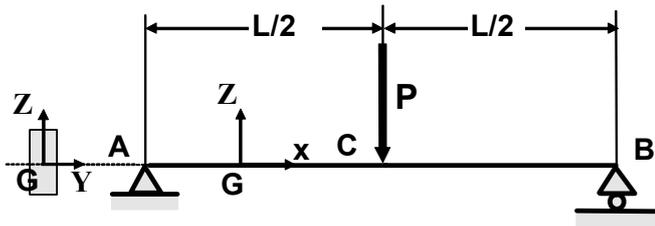
$$\text{Dans l'état } E_0' \quad W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} {}^t [P] [f] [P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}_{E_0'} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0'}$$

$$\text{Dans l'état } E_0 \quad W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_{11} P^2 = \frac{10P^2 L^3}{E\pi d^4}$$

Application numérique : P=1425N, E=210 GPa, L=1m, et d=40mm.

$$W_{\text{déf}} = \frac{10P^2 L^3}{E\pi d^4} = \frac{10 \times 1425^2 \times 1000^3}{210 \cdot 10^3 \times \pi \times 40^4} \quad W_{\text{déf}} = 12J$$

PROBLÈME N°11



En appliquant la méthode de CASTIGLIANO et en ne tenant compte que de l'énergie de déformation élastique due au moment fléchissant :

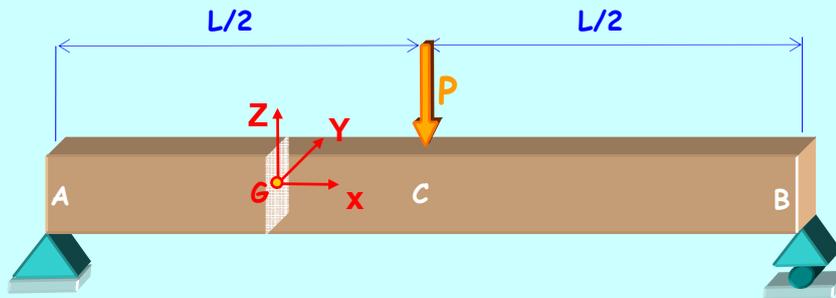
a) Déterminez l'expression littérale de la flèche maximum (en C) et des rotations aux extrémités A et B en fonction de P, L, E et I_T .

b) Calculer numériquement la flèche (en mm) et les rotations (en°) pour P = 12kN, L=1m; la section est un rectangle 80×40, E = 200 GPa.

RÉPONSES N°11

Nous ne pouvons déterminer que le déplacement vertical de la section C.

Ce déplacement correspond à la flèche maximale, car le problème est symétrique en l'absence de charge horizontale.

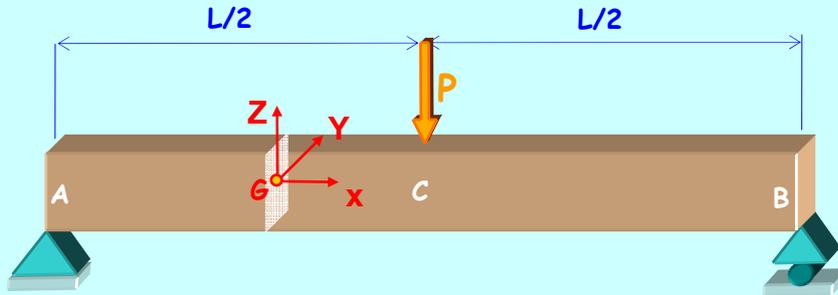


Nous désirons connaître la rotation de la section A. Il est donc nécessaire qu'il existe en A un moment « fictif » porté par l'axe de la rotation cherchée .

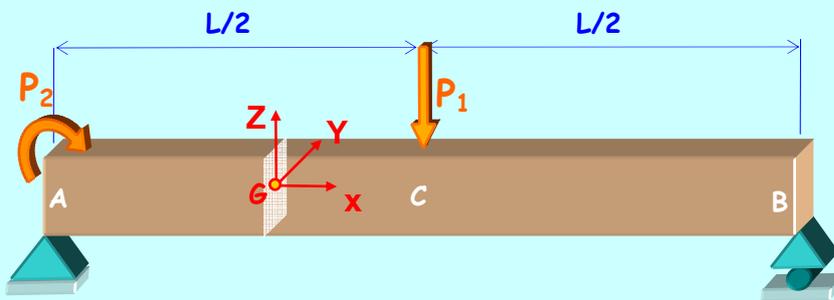
Appliquons alors en A un moment « fictif » P_2 suivant l'axe Y:

Nous désirons connaître la rotation de la section B. Il est donc nécessaire qu'il existe en B un moment « fictif » porté par l'axe de la rotation cherchée .

Appliquons alors en B un moment « fictif » P_3 suivant l'axe Y, mais compte tenu de la symétrie : $\theta_A = -\theta_B$. L'approche de P_3 n'est donc pas nécessaire.



Etat initial
 E_0



Etat intermédiaire
 E_0'

$$E_0 \equiv E_0' \{ P_1=P ; P_2=0 \}$$

Pour appliquer le théorème de Castigliano, nous devons au préalable calculer l'énergie de déformation élastique dans l'état E_0' .

$$W_{déf} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{N_x^2}{2EA} + \frac{T_y^2}{2GA} + \frac{T_z^2}{2GA} + \frac{M_x^2}{2GI_G} + \frac{M_y^2}{2EI_Y} + \frac{M_z^2}{2EI_Z} \right) dx$$

En ne tenant compte que de l'énergie due au moment fléchissant : $W_{déf} = \int_A^B \frac{(M_Y)_{E_0'}^2}{2EI_Y} dx$

Nous devons donc chercher le moment M_y . Pour cela, décomposons l'état E_0' en deux états :

Etat intermédiaire $E_{0'}$

Etat E_1

Etat E_2

$E_{0'} \equiv E_1 + E_2$

$(M_Y)_{E_{0'}} = (M_Y)_{E_1} + (M_Y)_{E_2}$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \int_A^B \frac{(M_Y)_{E_{0'}}^2}{2EI_Y} dx = \int_A^B \frac{((M_Y)_{E_1} + (M_Y)_{E_2})^2}{2EI_Y} dx = \int_A^B \frac{(M_Y)_{E_1}^2 + (M_Y)_{E_2}^2 + 2(M_Y)_{E_1}(M_Y)_{E_2}}{2EI_Y} dx$$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \int_A^B \frac{(M_Y)_{E_{0'}}^2}{2EI_Y} dx = \frac{1}{2EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_1}^2 dx + \frac{1}{2EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_2}^2 dx + \frac{1}{EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_1}(M_Y)_{E_2} dx$$

Pour calculer $W_{\text{d\u00e9f}}$ nous pouvons soit faire le calcul avec l\u2019\u00e9tat $E_{0'}$, soit avec les \u00e9tats E_1 et E_2 .

Premi\u00e8re approche :

Utilisons le tableau des int\u00e9grales de Mohr avec l\u2019\u00e9tat $E_{0'}$.

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \int_A^B \frac{(M_Y)_{E_{0'}}^2}{2EI_Y} dx$$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = 1/2EI_Y \left[\int_0^{L/2} \left(P_2 + \frac{P_2/2 + P_1L/4}{L/2} x \right)^2 dx \right] + 1/2EI_Y \left[\int_{L/2}^L \left(\frac{P_2/2 + P_1L/4}{L/2} (L-x) \right)^2 dx \right]$$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \frac{1}{2EI_Y} \left\{ \frac{1}{3} \left((P_2)^2 + P_2 \times \left(\frac{P_2}{2} + \frac{P_1L}{4} \right) + \left(\frac{P_2}{2} + \frac{P_1L}{4} \right)^2 \right) \frac{L}{2} + \left(\frac{1}{3} \left(\frac{P_2}{2} + \frac{P_1L}{4} \right)^2 \frac{L}{2} \right) \right\}$$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \frac{P_1^2 L^3}{96EI_Y} + \frac{P_2^2 L}{6EI_Y} + \frac{P_1 P_2 L^2}{16EI_Y}$$

Autre approche : à l'aide des états E_1 et E_2

$$W_{\text{déf}} = \frac{1}{2EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_1}^2 dx + \frac{1}{2EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_2}^2 dx + \frac{1}{EI_Y} \int_A^B (M_Y)_{E_1} (M_Y)_{E_2} dx$$

$$W_{\text{déf}} = \frac{1}{2EI_Y} \left[\int_0^L \left(\frac{P_1 L}{4} - \frac{P_1 x}{4} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{2EI_Y} \left[\int_0^L \left(\frac{P_2 x}{2} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{EI_Y} \left[\int_0^L \left(\frac{P_1 L}{4} - \frac{P_1 x}{4} \right) \left(\frac{P_2 x}{2} \right) dx \right]$$

$$W_{\text{déf}} = \frac{1}{2EI_Y} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{P_1 L}{4} \right)^2 L \right\} + \frac{1}{2EI_Y} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{P_2}{2} \right)^2 L \right\} + \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{P_1 L}{4} \times \frac{P_2}{2} \right) L \right\}$$

$$W_{\text{déf}} = \frac{P_1^2 L^3}{96EI_Y} + \frac{P_2^2 L}{6EI_Y} + \frac{P_1 P_2 L^2}{16EI_Y}$$

a) Expression littérale de la flèche maximum (en C)

Appliquons le théorème de Castigliano : $D_i = \frac{\partial W_{\text{déf}}}{\partial P_i}$

La dérivée partielle de l'énergie par rapport à P_1 nous donne le déplacement associé à P_1 .

$$D_1^{(E_0)} = \delta_v^{C(E_0)} = \frac{\partial W_{\text{déf}}}{\partial P_1} = \frac{P_1 L^3}{48EI_Y} + \frac{P_1 L^2}{16EI_Y}$$

Revenons maintenant au problème initial, sachant que : $E_0 \equiv E_0 \{ P_1=P ; P_2=0 \}$

$$\delta_v^{C(E_0)} = \frac{P L^3}{48EI_Y}$$

a) Expression littérale des rotations aux extrémités A et B

La dérivée partielle de l'énergie par rapport à P_2 nous donne le déplacement associé à P_2 .

$$D_2^{(E_0)} = \theta_y^{A(E_0)} = \frac{\partial W_{\text{déf}}}{\partial P_2} = \frac{P_2 L}{3EI_Y} + \frac{P_1 L^2}{16EI_Y}$$

Revenons maintenant au problème initial, sachant que : $E_0 \equiv E_0 \{ P_1=P ; P_2=0 \}$

$$\theta_y^{A(E_0)} = \frac{P L^2}{16EI_Y} = -\theta_y^{B(E_0)}$$

b) Numériquement : $P = 12\text{kN}$, $L=1\text{m}$; la section est un rectangle 80×40 , $E = 200\text{ GPa}$.

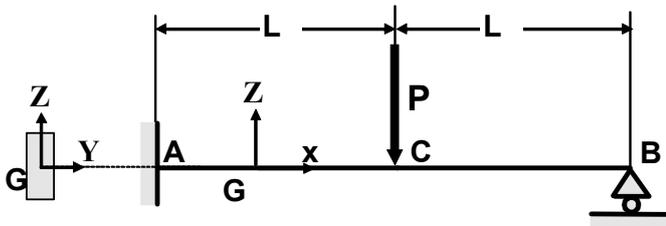
$$\delta_v^{C(E_0)} = \frac{P L^3}{48EI_Y} = \frac{12 \cdot 10^3 \times 1000^3 \times 12}{48 \times 200 \cdot 10^3 \times 40 \times 80^3} = 0,73\text{mm}$$

$$\delta_v^C = f_{max} = 0,73\text{ mm}$$

$$\theta_y^{A(E_0)} = \frac{P L^2}{16EI_Y} = \frac{12 \cdot 10^3 \times 1000^2 \times 12}{16 \times 200 \cdot 10^3 \times 40 \times 80^3} = 2,197 \cdot 10^{-3}\text{ rd} \Rightarrow 0,126^\circ$$

$$\theta_y^A = -\theta_y^B = 0,126^\circ$$

PROBLÈME N°12



Considérons le système hyperstatique ci-contre. On ne tient compte que du moment fléchissant pour le résoudre.

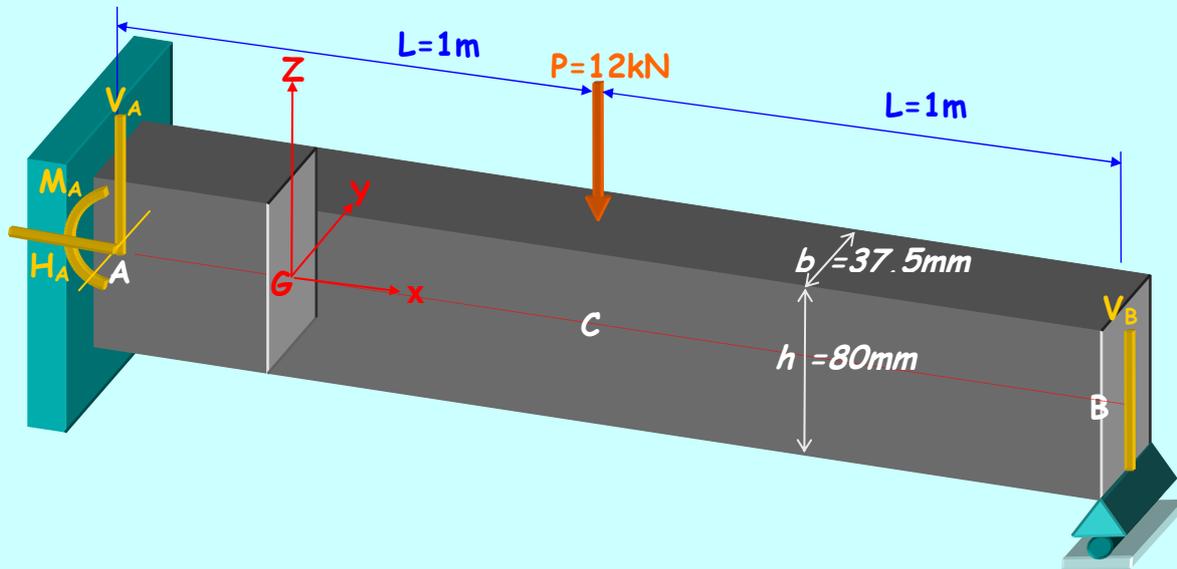
1°) Déterminez les expressions littérales des réactions. Tracer le diagramme des moments fléchissants.

2°) Déterminez les expressions littérales de la

flèche du point C et des rotations en C et B.

Application numérique : $P=12\text{kN}$, $L=1\text{m}$, $E=200\text{GPa}$, la section est un rectangle de $80\text{mm} \times 37,5\text{mm}$. Calculez la valeur du déplacement vertical de C (en mm) et les rotations de B et C (en rd).

RÉPONSES N°12



Problème plan (La géométrie est plane ainsi que le chargement) : $H=i-3n$.

- ✚ 3 degrés de liberté de supprimés en A (Encastrement) . Inconnues : $H_A ; V_A ; M_A$
- ✚ 1 degré de liberté de supprimé en B (Appui glissant) . Inconnue : V_B
- ✚ Un solide pour appliquer le premier principe de Newton.

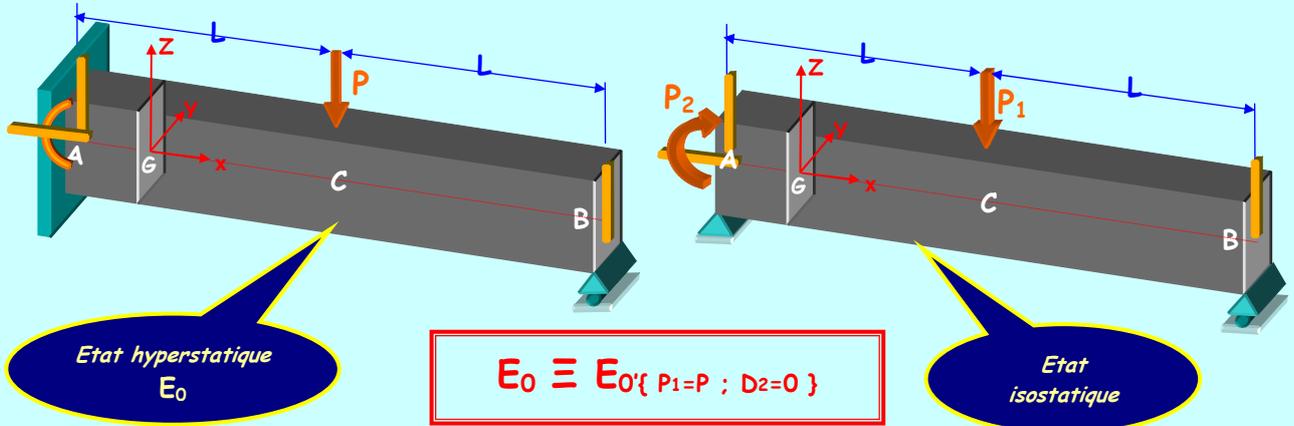
$H= i-3n = 4-3 = 1$ Le système est hyperstatique externe de degré 1 : $H_{ext}^{1^{\circ}}$

Le « Mathématicien » ne sait pas résoudre un système ou il existe plus d'inconnues que d'équations, le « Physicien » ne faisant pas mieux , il faut donc chercher des équations de déformations, qui rajoutées à celle de statique permettront de trouver les 4 inconnues.

Notre problème est hyperstatique de degré 1. Nous allons donc choisir une inconnue hyperstatique parmi les 4 ($H_A ; V_A ; V_B ; M_A$) afin de traiter un problème isostatique, dont l'hyperstatique ne constituera qu'un cas particulier. Plusieurs choix sont possibles pour l'inconnue hyperstatique, donc plusieurs résolutions possibles. Le chargement de l'isostatique sera celui de l'hyperstatique plus l'inconnue choisie :

Choix de l'inconnue hyperstatique : M_A

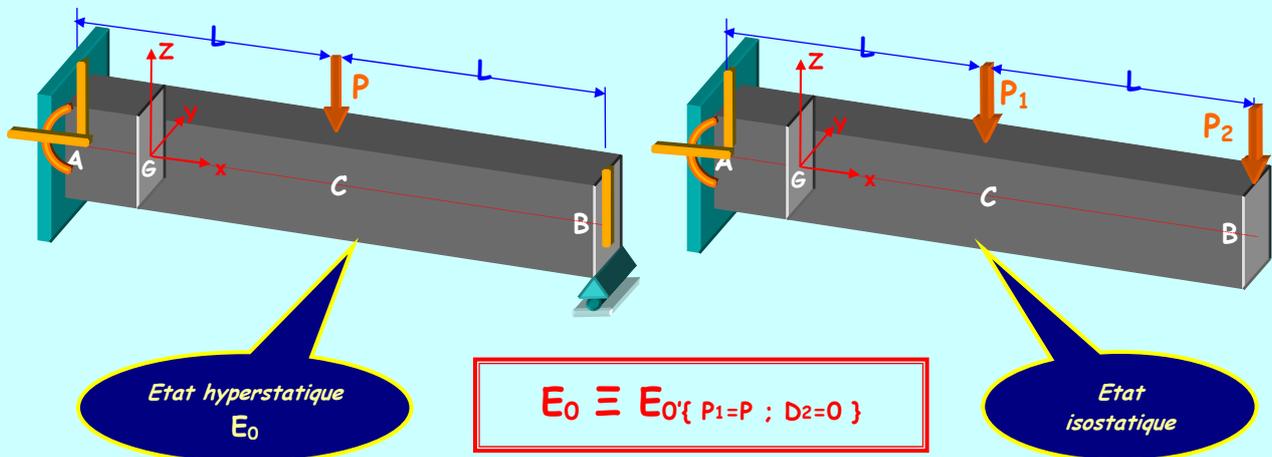
Remplaçons l'encastrement en A par un appui simple.



Les 2 états seront équivalents lorsque la rotation de la section A de l'isostatique sera nulle.

Choix de l'inconnue hyperstatique : V_B

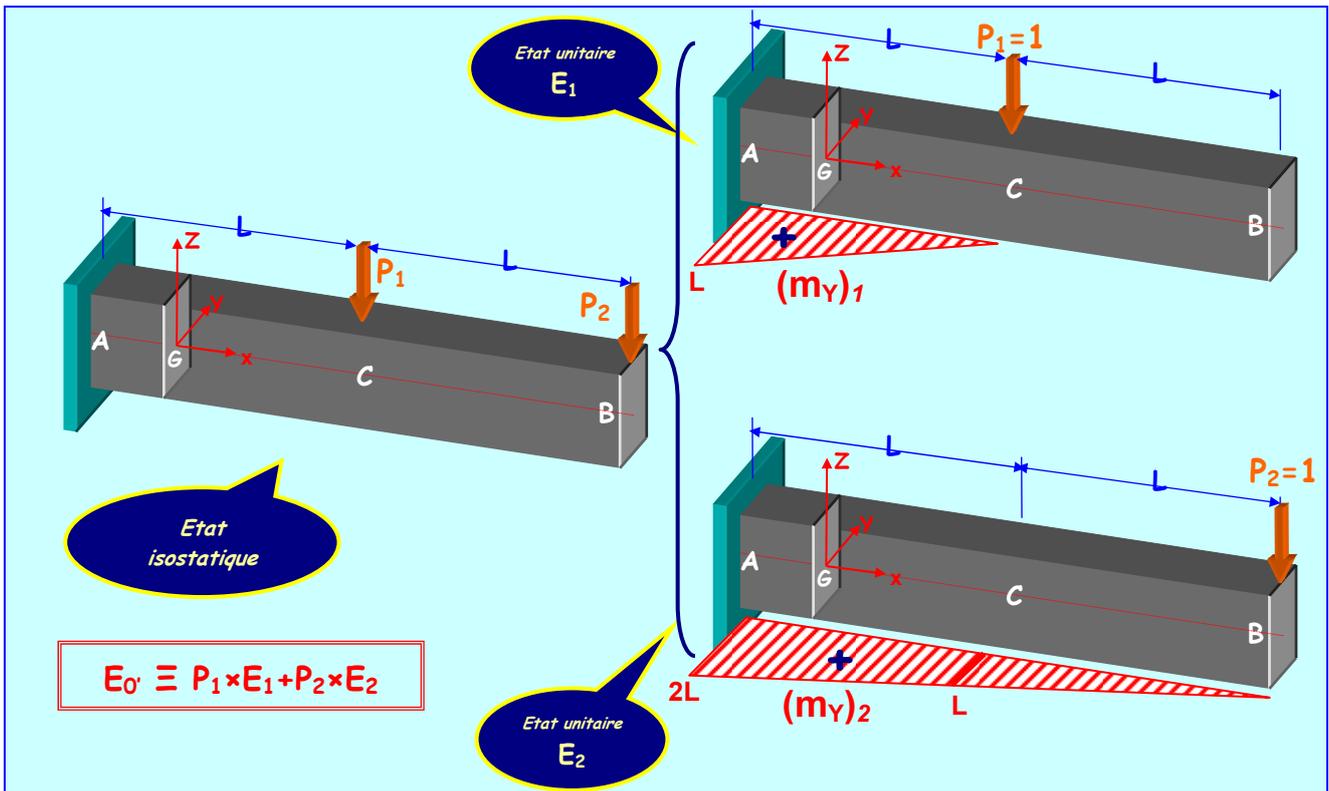
Supprimons la liaison en B



Les 2 états seront équivalents lorsque le déplacement vertical de la section B de l'état isostatique sera nul.

Il nous faut donc calculer des déplacements dans les états isostatiques.

Pour la suite du corrigé, conservons ce dernier choix de l'inconnue hyperstatique (V_B), et décomposons l'état isostatique E_0' en 2 états unitaires, afin de calculer D_2 , à l'aide de Maxwell-Mohr.



Dans l'état E_0 $[D]_{E_0} = [f]_{E_0} [P]_{E_0}$ $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$

Or dans l'état hyperstatique, le déplacement vertical de B est nul, P_2 s'identifie alors avec la valeur de la réaction V_B de l'état E_0 .

$$D_2 = \delta_v^B = f_{21}P_1 + f_{22}P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = -\frac{f_{21}P_1}{f_{22}}$$

Calcul des coefficients d'influence $f_{ij} = \int_A^C \frac{(m_Y)_i (m_Y)_j}{EI_Y} dx$ à l'aide des intégrales de Mohr :

Calcul de f_{11} :

$$f_{11} = 1/EI_Y \left(\int_0^L \frac{1}{2} x dx \right)^2 \quad f_{11} = \int_A^C \frac{(m_Y)_1^2}{EI_Y} dx = \frac{1}{EI_Y} \times \frac{1}{3} \times L^2 \times L \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI_Y}$$

Calcul de f_{22} :

$$f_{22} = 1/EI_Y \left(\int_0^{2L} \frac{1}{2} x dx \right)^2 \quad f_{22} = \int_A^B \frac{(m_Y)_2^2}{EI_Y} dx = \frac{1}{EI_Y} \times \frac{1}{3} \times 4L^2 \times 2L \quad f_{22} = \frac{8L^3}{3EI_Y}$$

Calcul de f_{12} :

$$f_{12} = \int_A^C \frac{(m_Y)_1 (m_Y)_2}{EI_Y} dx + \int_C^B \frac{(m_Y)_1 (m_Y)_2}{EI_Y} dx$$

$$f_{12} = 1/EI_Y \left(\left[\begin{array}{c} 2L \\ \text{trapezoidal area} \\ L \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} L \\ \text{triangular area} \\ L \end{array} \right] \right) + 1/EI_Y \left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ \text{zero} \\ L \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} L \\ \text{triangular area} \\ L \end{array} \right] \right)$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{6} \times L \times (2(2L) + L)L \right\} \quad f_{12} = \frac{5L^3}{6EI_Y}$$

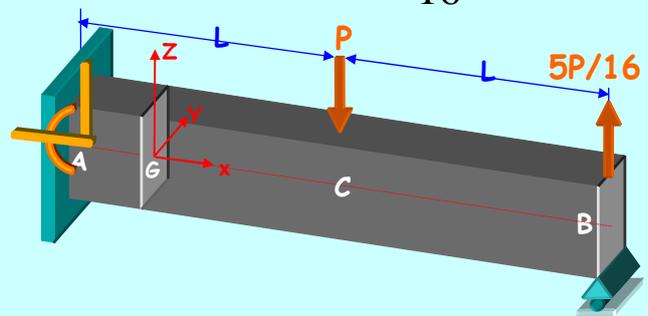
Calcul de la réaction V_B :

$$P_2 = -\frac{f_{21}P_1}{f_{22}} = -\frac{\frac{5L^3}{6EI_Y}P_1}{\frac{8L^3}{3EI_Y}}$$

$$P_2 = -\frac{5}{16}P_1$$

Compte tenu du choix arbitraire du sens de P_2 que nous avons fait, et trouvant P_2 négatif, nous en concluons que la réaction verticale en B dans l'état hyperstatique est verticale ascendante.

Sa norme étant de $5P/16$.



Le problème initial est maintenant isostatique. Pour trouver les 3 inconnues externes restantes $H_A ; V_A ; M_A$, nous pouvons utiliser les 3 équations de statique, ou calculer sur l'état E_0 en faisant $P_2=5P/16$

$$E_0 \equiv E_0 \{ P_1=P ; D_2=0 \} \equiv P_1 \times E_1 + P_2 \times E_2 \equiv P \times E_1 - (5P/16) \times E_2$$

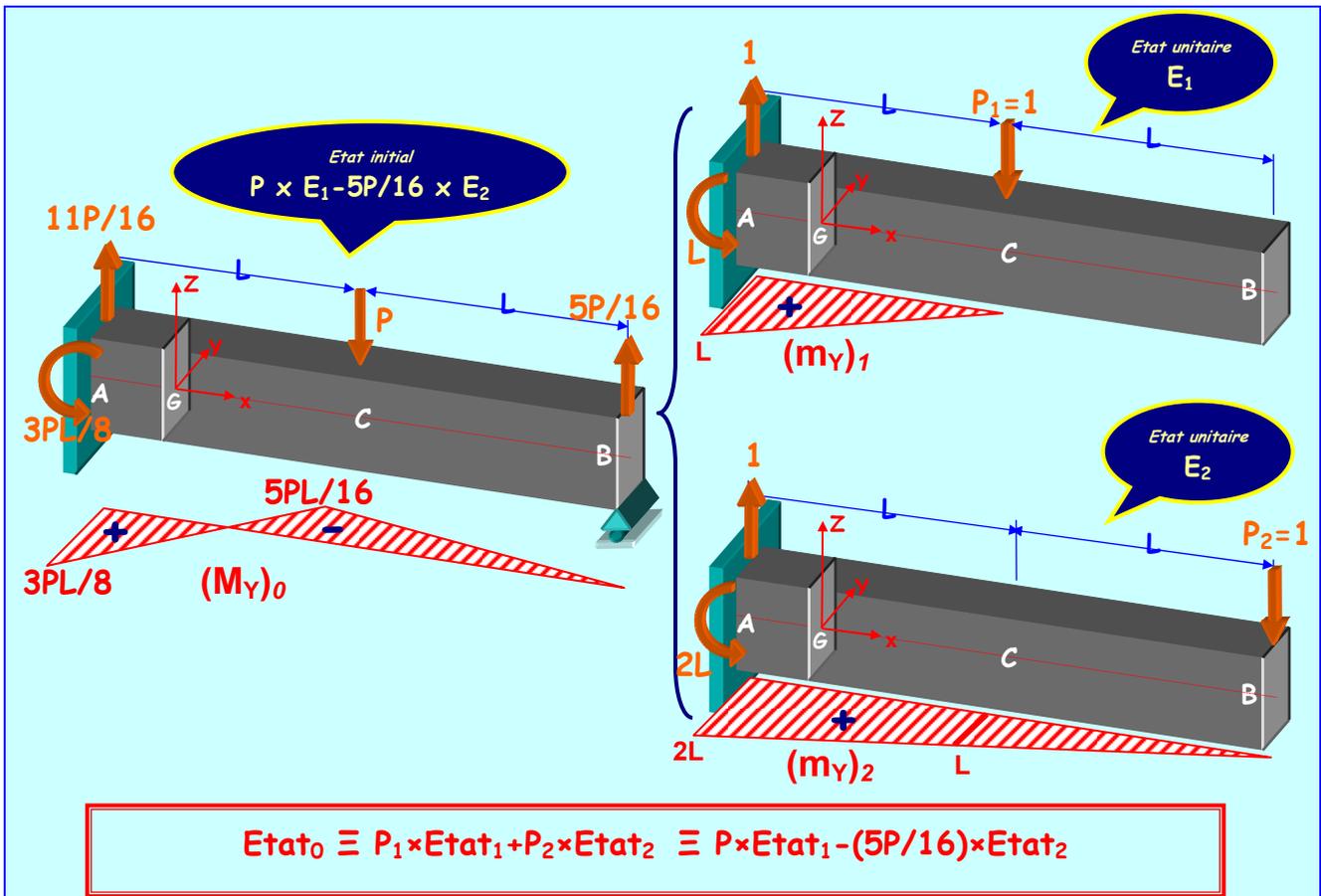
$$\begin{array}{ll} H^A_0 = P \times H^A_1 - (5P/16) \times H^A_2 & H^A_0 = P \times 0 - (5P/16) \times 0 = 0 \\ V^A_0 = P \times V^A_1 - (5P/16) \times V^A_2 & V^A_0 = P \times 1 - (5P/16) \times 1 = 11P/16 \\ M^A_0 = P \times M^A_1 - (5P/16) \times M^A_2 & M^A_0 = P \times L - (5P/16) \times 2L = 3PL/8 \end{array}$$

Diagramme des moments fléchissants :

Pour trouver le diagramme des moments fléchissants, nous utilisons les résultats obtenus sur l'état isostatique E_0 au lieu de tout refaire le problème initial.

$$M_{y(E_0)} = P \times m_{y(E_1)} - (5P/16) \times m_{y(E_2)}$$

$$\begin{array}{l} M_{y^A(E_0)} = P \times m_{y^A(E_1)} - (5P/16) \times m_{y^A(E_2)} = P \times L - (5P/16) \times 2L = 3PL/8 \\ M_{y^C(E_0)} = P \times m_{y^C(E_1)} - (5P/16) \times m_{y^C(E_2)} = P \times 0 - (5P/16) \times L = -5PL/16 \\ M_{y^B(E_0)} = P \times m_{y^B(E_1)} - (5P/16) \times m_{y^B(E_2)} = P \times 0 - (5P/16) \times 0 = 0 \end{array}$$



Expressions littérales de la flèche du point C et des rotations en C et B

flèche du point C :

Dans l'état E_0 :

$$\begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{L^3}{3EI_Y} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$$

Dans l'état E_0 :

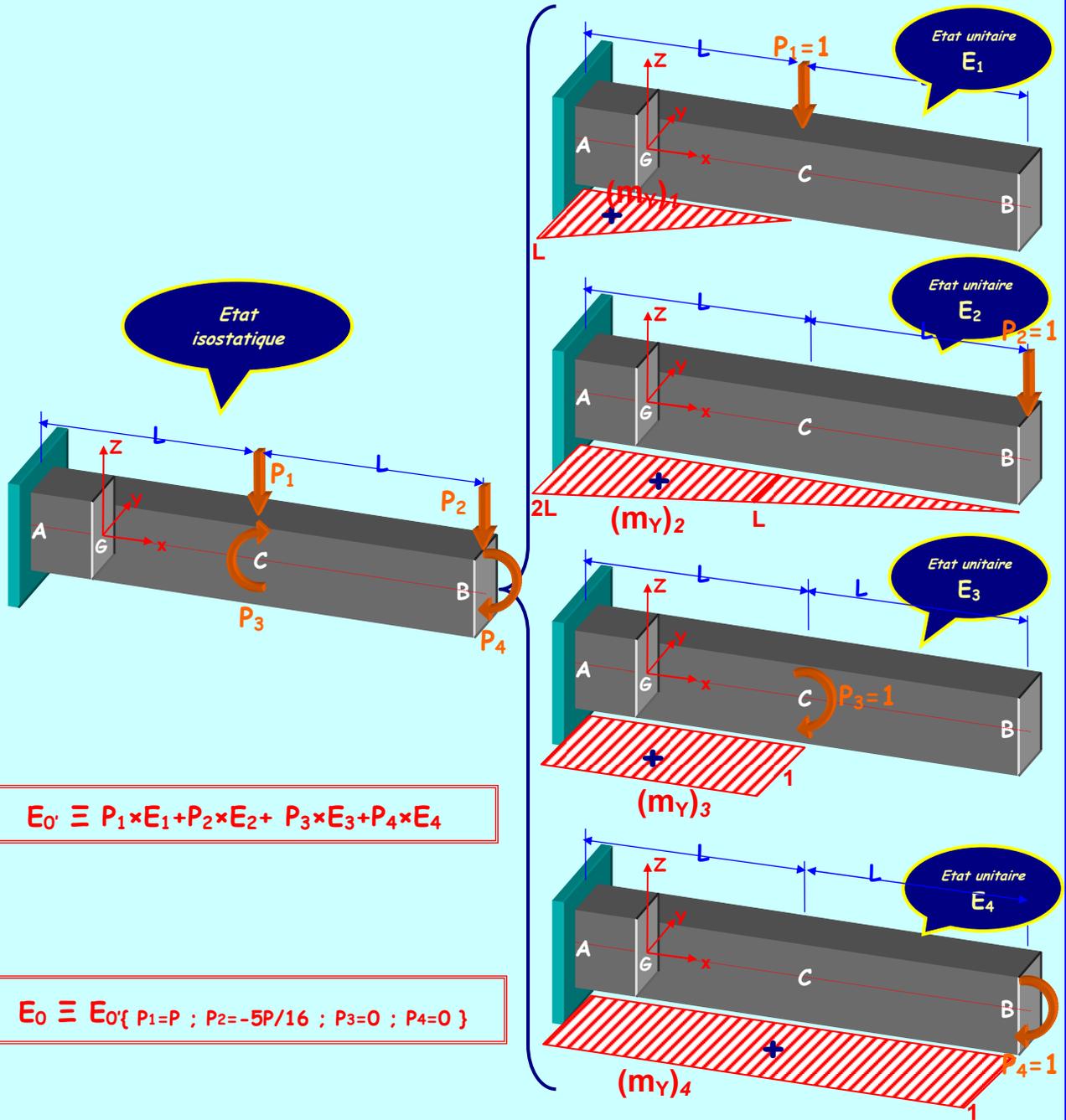
$$\begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{L^3}{3EI_Y} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -\frac{5P}{16} \end{bmatrix} \quad \delta_v^{C(E_0)} = \frac{L^3}{3EI_Y} \left(P - \frac{5}{2} \times \frac{5P}{16} \right) \quad \delta_v^C = 7PL^3/96EI_Y$$

Le déplacement s'effectue dans le même sens que celui de P_1 .

Rotations en C et B :

Pour rechercher les rotations des sections C et B il faut qu'il existe en C et B des moments portés par l'axe des rotations cherchées.

Compte tenu des résultats dont nous disposons, il sera plus simple de raisonner à partir de l'état isostatique équivalent E_0 . Cherchons donc, dans un premier temps, les rotations des sections C et B dans l'état isostatique E_0 . Rajoutons sur ce dernier 2 couples P_3 , et P_4 en C et D.



Décomposons l'état E_0 en 4 états unitaires pour appliquer la méthode de Maxwell-Mohr

Dans l'état E_0 :

$$\begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \\ \theta_y^C \\ \theta_y^B \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_y} & \frac{5L^3}{6EI_y} & f_{13} & f_{14} \\ \frac{5L^3}{6EI_y} & \frac{8L^3}{3EI_y} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}_{E_0}$$

Dans l'état E_0 :

$$\begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \\ \theta_y^C \\ \theta_y^B \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_Y} & \frac{5L^3}{6EI_Y} & f_{13} & f_{14} \\ \frac{5L^3}{6EI_Y} & \frac{8L^3}{3EI_Y} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -5P \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0}$$

Nous devons donc calculer seulement les coefficients f_{31} , f_{32} , f_{41} , et f_{42} .

Calcul de f_{13} :

$$f_{13} = \int_A^C \frac{(m_Y)_1(m_Y)_3}{EI_Y} dx + \int_C^B \frac{(m_Y)_1(m_Y)_3}{EI_Y} dx$$

$$f_{13} = 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} L \\ \text{triangular} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular} \\ L \end{array} \right) + 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{line} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 0 \\ \text{line} \\ L \end{array} \right)$$

$$f_{13} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{2} \times 1 \times L \times L \right\} \qquad f_{13} = \frac{L^2}{2EI_Y}$$

Calcul de f_{23} :

$$f_{23} = \int_A^C \frac{(m_Y)_2(m_Y)_3}{EI_Y} dx + \int_C^B \frac{(m_Y)_2(m_Y)_3}{EI_Y} dx$$

$$f_{23} = 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} 2L \\ \text{trapezoidal} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular} \\ L \end{array} \right) + 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} L \\ \text{triangular} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 0 \\ \text{line} \\ L \end{array} \right)$$

$$f_{23} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{2} \times 1 \times (2L + L)L \right\} \qquad f_{23} = \frac{3L^2}{2EI_Y}$$

Calcul de f_{14} :

$$f_{14} = \int_A^C \frac{(m_Y)_1(m_Y)_4}{EI_Y} dx + \int_C^B \frac{(m_Y)_1(m_Y)_4}{EI_Y} dx$$

$$f_{14} = 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} L \\ \text{triangular} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular} \\ L \end{array} \right) + 1/EI_Y \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{line} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular} \\ L \end{array} \right)$$

$$f_{14} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{2} \times L \times 1 \times L \right\} \qquad f_{14} = \frac{L^2}{2EI_Y}$$

Calcul de f_{24} :

$$f_{24} = \int_A^C \frac{(m_y)_2 (m_y)_4}{EI_Y} dx + \int_C^B \frac{(m_y)_2 (m_y)_4}{EI_Y} dx$$

$$F_{24} = 1/EI_Y \left(\left[\begin{array}{c} 2L \\ \text{trapezoidal diagram} \\ L \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular diagram} \\ L \end{array} \right] \right) + 1/EI_Y \left(\left[\begin{array}{c} L \\ \text{triangular diagram} \\ L \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{rectangular diagram} \\ L \end{array} \right] \right)$$

$$f_{24} = \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{2} \times 1 \times (2L + L)L + \frac{1}{2} \times 1 \times L \times L \right\} \quad f_{24} = \frac{2L^2}{EI_Y}$$

Dans l'état E_0 :

$$\begin{bmatrix} \delta_v^C \\ \delta_v^B \\ \theta_y^C \\ \theta_y^B \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_Y} & \frac{5L^3}{6EI_Y} & \frac{L^2}{2EI_Y} & \frac{L^2}{2EI_Y} \\ \frac{5L^3}{6EI_Y} & \frac{8L^3}{3EI_Y} & \frac{3L^2}{2EI_Y} & \frac{2L^2}{EI_Y} \\ \frac{L^2}{2EI_Y} & \frac{3L^2}{2EI_Y} & f_{33} & f_{34} \\ \frac{L^2}{2EI_Y} & \frac{2L^2}{EI_Y} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -5P \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0}$$

$$\theta_y^C = \frac{PL^2}{2EI_Y} - \frac{3L^2}{2EI_Y} \frac{5P}{16} = \frac{PL^2}{32EI_Y} \quad \theta_y^C = PL^2/32EI_Y$$

$$\theta_y^B = \frac{PL^2}{2EI_Y} - \frac{2L^2}{EI_Y} \frac{5P}{16} = -\frac{PL^2}{8EI_Y} \quad \theta_y^B = -PL^2/8EI_Y$$

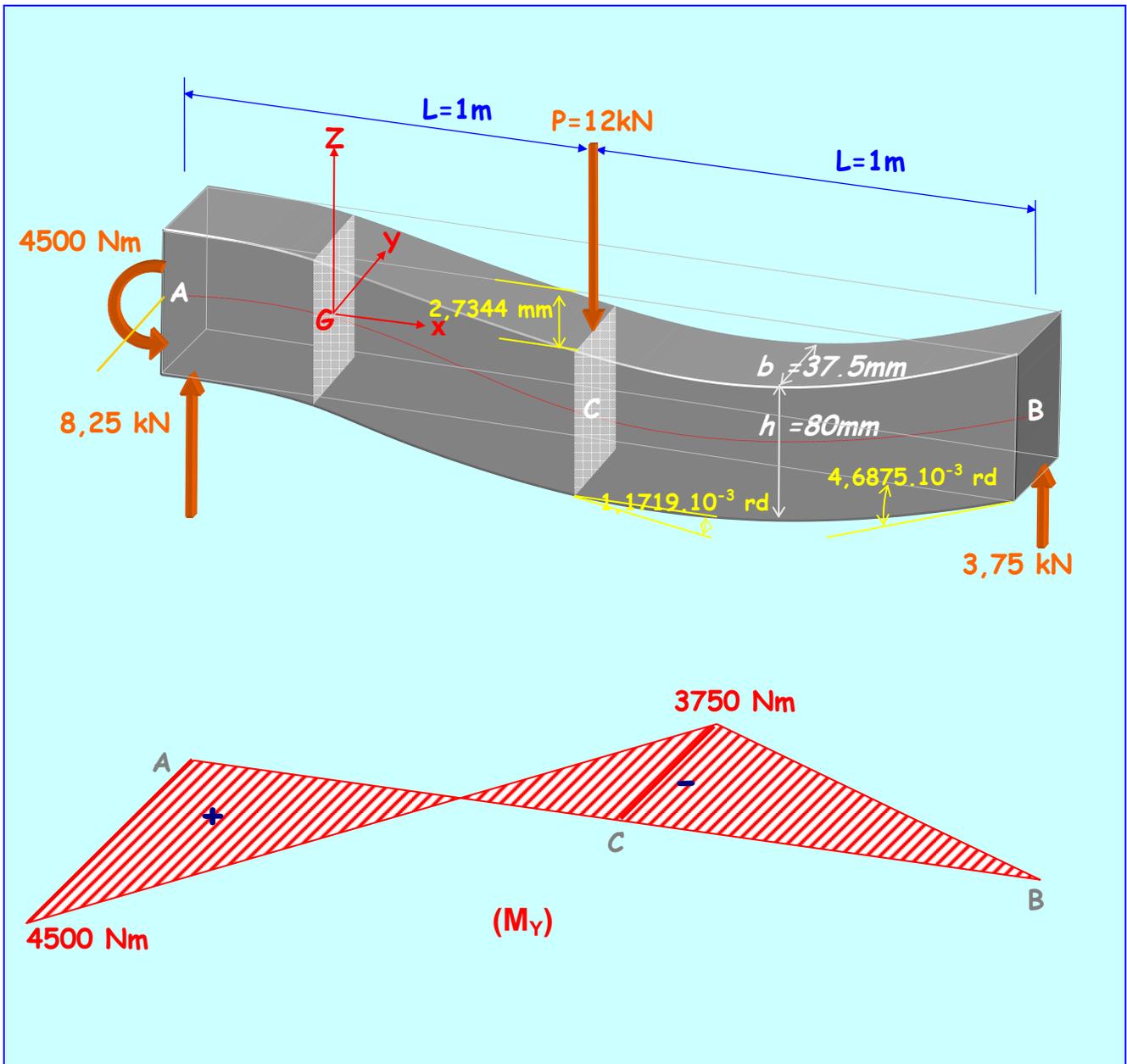
Application numérique : P=12kN, L=1m, E=200GPa, la section est un rectangle de 80mmx37.5mm.

Dans le repère XYZ :

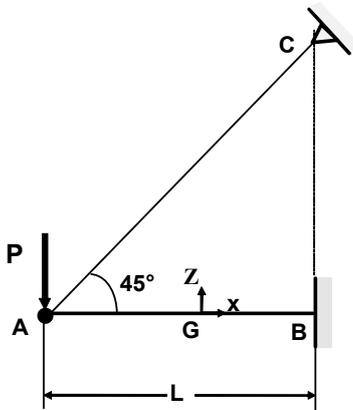
$$A_z = \frac{11P}{16} = 8.25\text{kN} \quad B_z = \frac{5P}{16} = 3.75\text{kN} \quad M_{AY} = \frac{3PL}{8} = 4500\text{Nm}$$

$$\text{Moments fléchissants } M_y \quad M_{YA} = \frac{3PL}{8} = 4500\text{Nm} \quad M_{YC} = -\frac{5PL}{16} = -3750\text{Nm} \quad M_{YB} = 0$$

$$\delta_{VC} = -\frac{7PL^3}{96EI_Y} = -2.7344\text{mm} \quad \theta_{YC} = \frac{PL^2}{32EI_Y} = 1.171910^{-3}\text{rd} \quad \theta_{YB} = -\frac{PL^2}{8EI_Y} = -4.687510^{-3}\text{rd}$$



PROBLÈME N° 13



La poutre encastree AB ci-contre, de section carreee 60x60, est haubane'e par un ca'ble AC de diametre 5 mm. $L = 1\text{ m}$, $E = 200\text{ GPa}$, $P = 3\text{ kN}$. Le syste'me est hyperstatique. Calculez :

- 1°) la tension dans le ca'ble.
- 2°) le de'placement vertical du point A.

RÉPONSES N°13

Deux solides (La barre AB et le câble AC),

3 inconnues en B (encastrement),

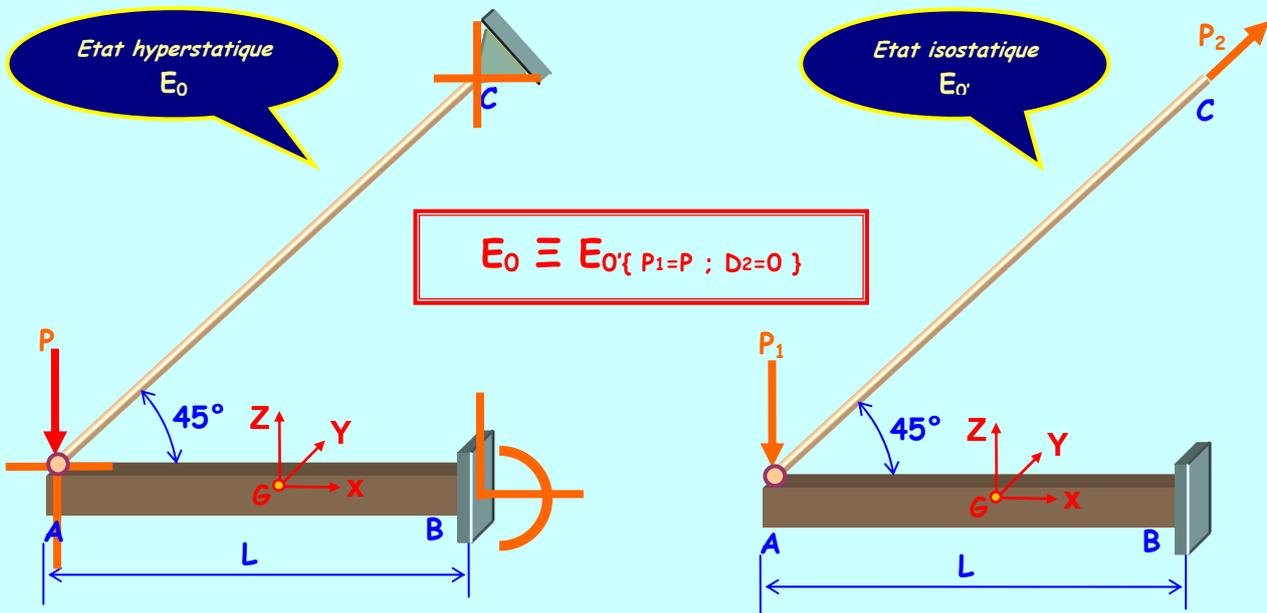
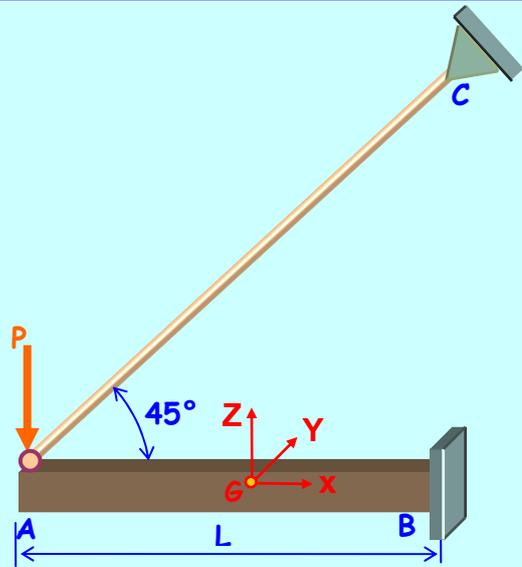
2 inconnues en A et en C (articulations) :

$$H = i - 3n = 7 - 3 \times 2 = 1$$

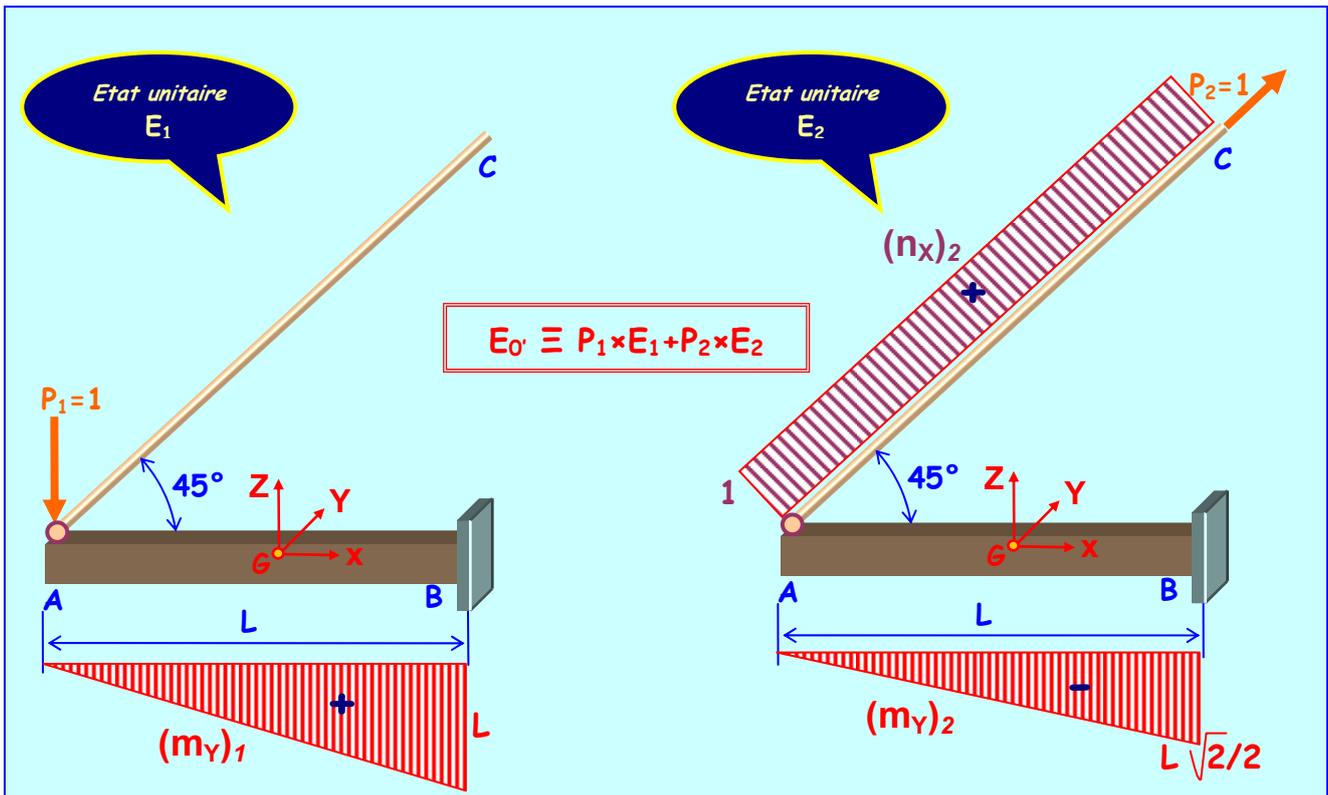
Le système est hyperstatique externe de degré 1 : $H_{ext} = 1$

Le câble AC étant articulé à ses deux extrémités est donc soumis qu'à un effort normal.

Choisissons donc comme inconnue hyperstatique la réaction en C.



Décomposons l'état isostatique E_0 en deux états unitaires E_1 et E_2 .



$$E_0 \equiv P_1 \times E_1 + P_2 \times E_2$$

Dans l'état E_0 $[D]_{E_0} = [f]_{E_0} [P]_{E_0}$ $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \delta_v^A \\ \delta_{AC}^C \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$

Or dans l'état hyperstatique, le déplacement de C dans la direction de P_2 est nul, P_2 s'identifie alors avec la valeur de la réaction en C de l'état E_0 .

$$D_2 = \delta_{AC}^C = f_{21} P_1 + f_{22} P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = -\frac{f_{21} P_1}{f_{22}}$$

Calcul des coefficients d'influence $f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} + \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} \right) dx$ à l'aide des intégrales de Mohr :

Calcul de f_{11} :

$$f_{11} = 1/EI_y^{AB} \left(\int_0^L \frac{(m_y)_1^2}{EI_y^{AB}} dx \right) = \int_A^B \frac{(m_y)_1^2}{EI_y^{AB}} dx = \frac{1}{EI_y^{AB}} \times \frac{1}{3} \times L^2 \times L \quad f_{11} = \frac{L^3}{3EI_y^{AB}}$$

Calcul de f_{22} :

$$f_{22} = \int_A^B \frac{(m_y)_2^2}{EI_y^{AB}} dx + \int_A^C \frac{(n_x)_2^2}{EA^{AC}} dx$$

$$f_{22} = 1/EI_y^{AB} \left(\int_0^{L\sqrt{2}/2} \frac{(m_y)_2^2}{EI_y^{AB}} dx \right) + 1/EA^{AC} \left(\int_0^{L\sqrt{2}} \frac{(n_x)_2^2}{EA^{AC}} dx \right)$$

$$f_{22} = \left\{ \frac{1}{EI_y^{AB}} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L \right)^2 \times L \right\} + \left\{ \frac{1}{EA^{AC}} \times 1^2 \times \sqrt{2} L \right\} \quad f_{22} = \frac{L^3}{6EI_y^{AB}} + \frac{L\sqrt{2}}{EA^{AC}}$$

Calcul de f_{12} :

$$f_{12} = \int_A^B \frac{(m_y)_1 (m_y)_2}{EI_y^{AB}} dx$$

$$f_{12} = 1/EI_y^{AB} \left(\begin{array}{c} L \\ \text{---} \\ L \end{array} \times \begin{array}{c} L\sqrt{2}/2 \\ \text{---} \\ L \end{array} \right)$$

$$f_{12} = -\frac{1}{EI_y^{AB}} \left\{ \frac{1}{3} \times L \times \left(\frac{L\sqrt{2}}{2} \right) L \right\} \quad f_{12} = -\frac{\sqrt{2}L^3}{6EI_y^{AB}}$$

Calcul de la réaction en C :

$$P_2 = -\frac{f_{21}P_1}{f_{22}} = -\frac{-\frac{\sqrt{2}L^3}{6EI_y^{AB}}P_1}{\frac{L^3}{6EI_y^{AB}} + \frac{L\sqrt{2}}{EA^{AC}}} \quad P_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{6\sqrt{2}I_y^{AB}}{L^2 A^{AC}}} P_1$$

1°) Tension dans le câble.

Nous avons choisi arbitrairement l'inconnue de l'action en C de telle sorte que le câble AC soit tendue. Nous trouvons P_2 positif : Le câble est donc en traction.

L'effort normal dans le câble est :

$$N_X^{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{6\sqrt{2}I_y^{AB}}{L^2 A^{AC}}} P$$

Application numérique : Section AB carrée 60×60, haubanée par un câble AC de diamètre 5 mm. L = 1 m, E = 200 GPa, P = 3 kN.

$$N_X^{AC} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{6\sqrt{2} \times 60^4 \times 4}{12 \times 1000^2 \times \pi \times 5^2}} 3.10^3 = 2893N \quad N_X^{AC} = 2893 N$$

2°) Déplacement vertical du point A.

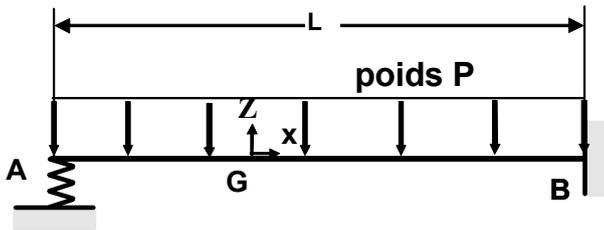
Dans l'état $E_{0'}$ $[D]_{E_{0'}} = [f]_{E_{0'}} [P]_{E_{0'}}$ $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_{0'}} = \begin{bmatrix} \delta_v^A \\ \delta_{AC}^C \end{bmatrix}_{E_{0'}} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_{0'}}$

Dans l'état E_0 $\begin{bmatrix} \delta_v^A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 2893 \end{bmatrix}$

$$\delta_v^A = f_{11}3000 + f_{12}2893 = \frac{L^3}{3EI_y^{AB}}3000 - \frac{\sqrt{2}L^3}{6EI_y^{AB}}2893 = \frac{L^3}{3EI_y^{AB}} \left(3000 - \frac{\sqrt{2}}{2}2893 \right)$$

$$\delta_v^A = \frac{1000^3 \times 12}{3 \times 200.10^3 \times 60^4} \left(3000 - \frac{\sqrt{2}}{2}2893 \right) = 1,473mm \quad \delta_v^A = 1,47 mm$$

PROBLÈME N°14



La poutre encadrée AB ci-contre a son extrémité libre qui repose en A sur un appui élastique modélisé par un ressort dont la raideur est k. Le système est hyperstatique.

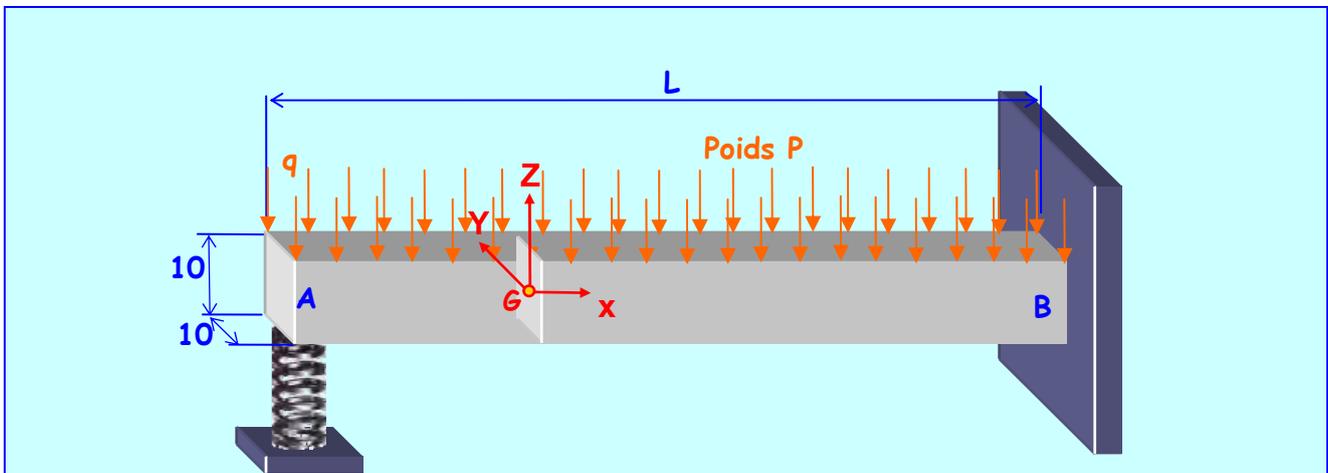
En l'absence de la charge répartie, la poutre est rectiligne et le ressort n'est pas sollicité.

On ne tient compte que du moment fléchissant pour résoudre le système.

1°) Déterminez l'expression littérale de la force qui comprime le ressort et en déduire l'expression de la flèche du ressort.

2°) Calculez numériquement la force qui comprime le ressort et la flèche du ressort pour $k = 0.1, 0.5, 1, 10 \text{ N/mm}$ et $k \rightarrow \infty$. La barre est à section carrée 10×10 , $\rho = 7.85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ (prendre $g=10\text{m/s}^2$), $L = 1 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$.

RÉPONSES N°14



Problème plan (La géométrie est plane ainsi que le chargement) : $H=i-3n$.

⊕ 3 degrés de liberté de supprimés en A (Encastrement) . Inconnues : $H_B ; V_B ; M_B$

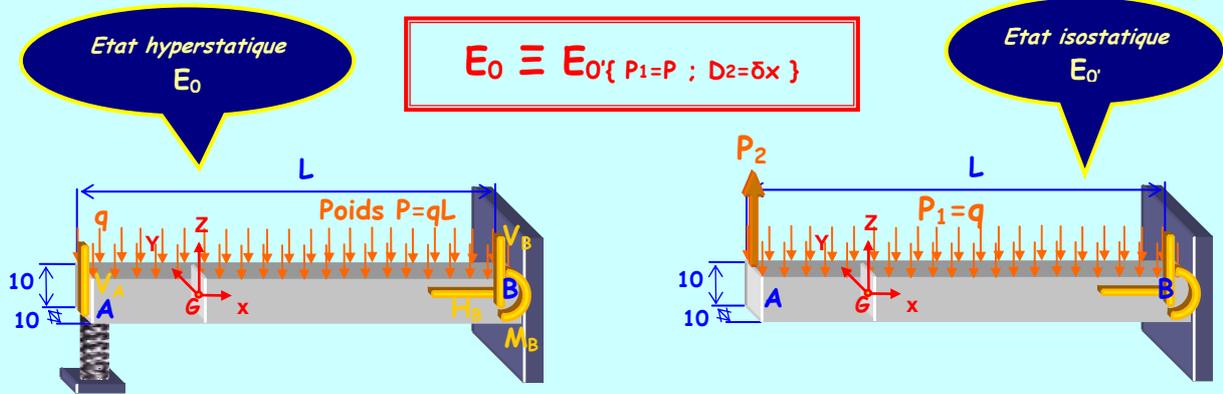
⊕ 1 degré de liberté imposé en B (Appui élastique) . Inconnue : V_A

⊕ Un solide pour appliquer le premier principe de Newton.

$H= i-3n = 4-3 = 1$ Le système est hyperstatique externe de degré 1 : $H_{ext}^{1°}$

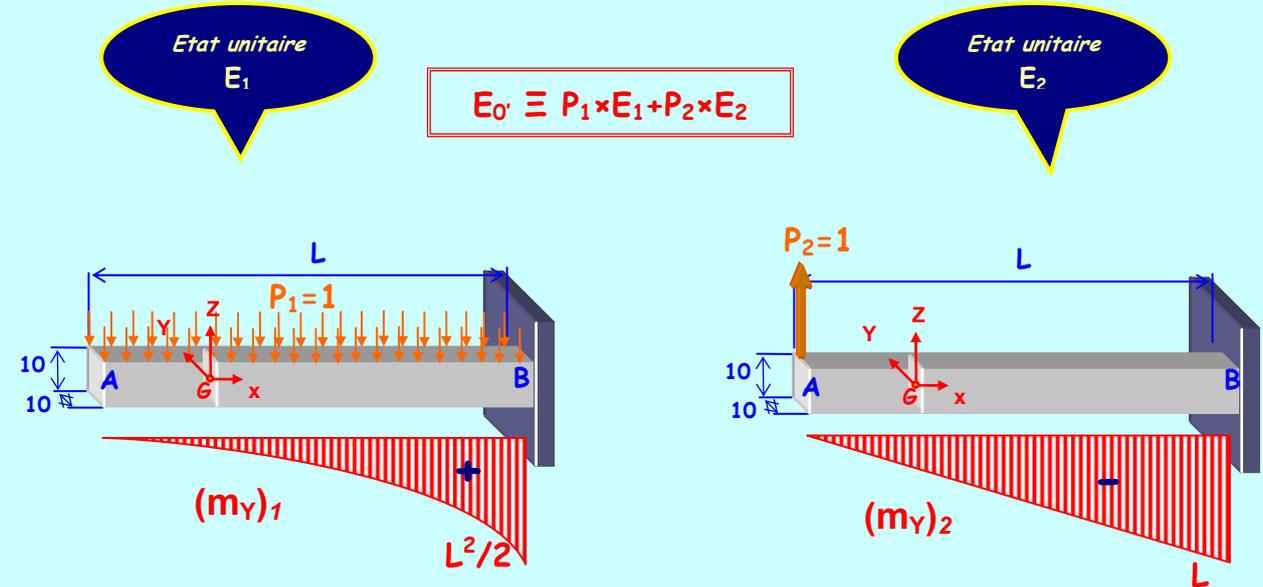
Choix de l'inconnue hyperstatique : V_A

Supprimons la liaison en A



Les 2 états seront équivalents lorsque le déplacement vertical de la section A de l'état isostatique sera égal à la flèche δ_x du ressort.

Décomposons l'état isostatique $E_{0'}$ en 2 états unitaires, afin de calculer $D_2 = \delta_x$ (flèche du ressort), à l'aide de Maxwell-Mohr.



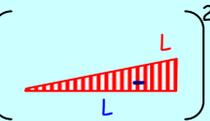
Dans l'état $E_{0'}$ $D_2 = \delta_v^A = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$

Calcul des coefficients d'influence $f_{ij} = \int_0^L \left(\frac{(m_Y)_i (m_Y)_j}{EI_Y} \right) dx$ à l'aide des intégrales de Mohr :

Calcul de f_{22} : $f_{22} = \int_A^B \frac{(m_Y)_2^2}{EI_Y} dx$

$f_{22} = \left\{ \frac{1}{EI_Y} \times \frac{1}{3} \times L^2 \times L \right\}$ $f_{22} = \frac{L^3}{3EI_Y}$

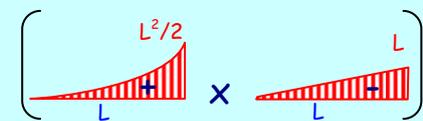
$f_{22} = 1/EI_Y \left(\text{Diagramme triangulaire} \right)^2$



Calcul de f_{12} : $f_{12} = \int_A^B \frac{(m_Y)_1(m_Y)_2}{EI_Y} dx$

$f_{12} = -\frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{1}{4} \times L \times \left(\frac{L^2}{2} \right) \times L \right\}$ $f_{12} = -\frac{L^4}{8EI_Y}$

$f_{12} = 1/EI_Y \left(\text{Diagramme parabolique} \times \text{Diagramme triangulaire} \right)$



Dans l'état E_0 $D_2 = \delta_v^A = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$ $D_2 = \delta_v^A = -\frac{L^4 P_1}{8EI_Y} + \frac{L^3 P_2}{3EI_Y}$

Dans l'état E_0 $\delta_v^A = -\frac{L^4 q}{8EI_Y} + \frac{L^3 F_A}{3EI_Y}$ or $F_A = -kf$ et $P = qL$

$-\frac{L^4 q}{8EI_Y} + \frac{L^3 F_A}{3EI_Y} = -\frac{F_A}{k}$ d'où : $F_A = \frac{3P}{8} \left(\frac{1}{1 + \frac{3EI_Y}{kL^3}} \right)$

$F_A = \frac{3P}{8} \left(\frac{1}{1 + \frac{3EI_Y}{kL^3}} \right)$

Application numérique : La barre est à section carrée 10×10 , $\rho = 7.85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ (prendre $g=10\text{m/s}^2$), $L = 1 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$

$F_A = \frac{3 \times 10 \times 10 \times 1000 \times 7,85 \cdot 10^{-6} \times 10}{8} \left(\frac{1}{1 + \frac{3 \times 210 \cdot 10^3 \times 10^4}{12 \times 1000^3 \times k}} \right)$

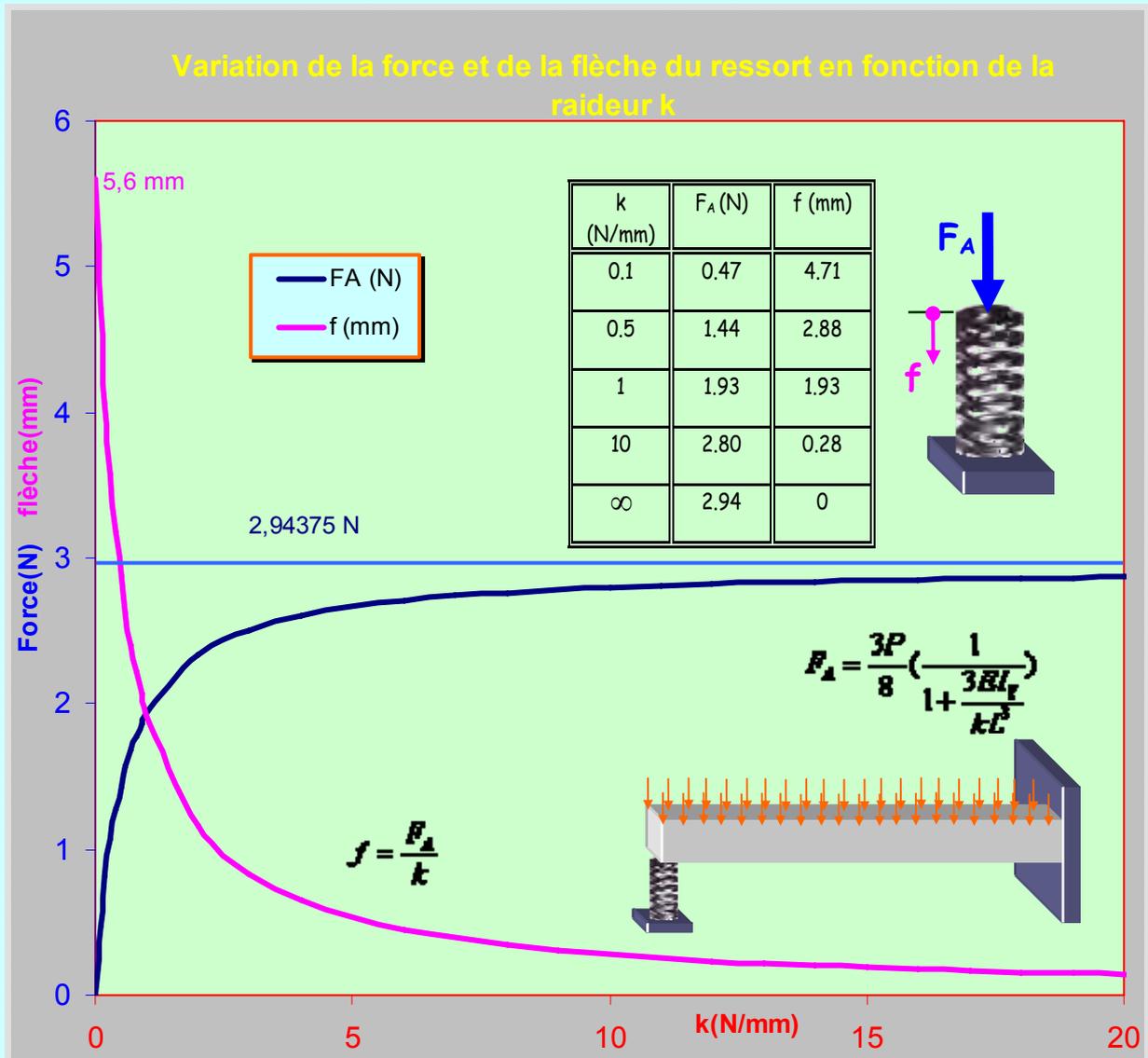
$$F_A = 2,94375 \left(\frac{1}{1 + \frac{0,525}{k}} \right)$$

Pour k=0 :

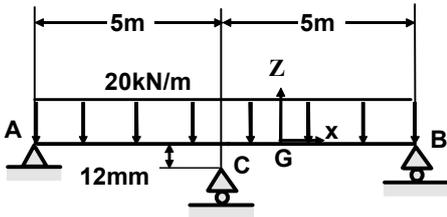
$$\delta_v^A = -\frac{L^4 q}{8EI_Y} = -\frac{L^3 P}{8EI_Y} = -\frac{1000^3 \times 10 \times 10 \times 1000 \times 7,85 \cdot 10^{-6} \times 10 \times 12}{8 \times 210 \cdot 10^3 \times 10^4} = 5,60714 \text{ mm}$$

Pour k=∞ :

La force F_A tend vers $F_A = \frac{3P}{8} = 2,94 \text{ N}$, et la flèche f tend vers 0 :

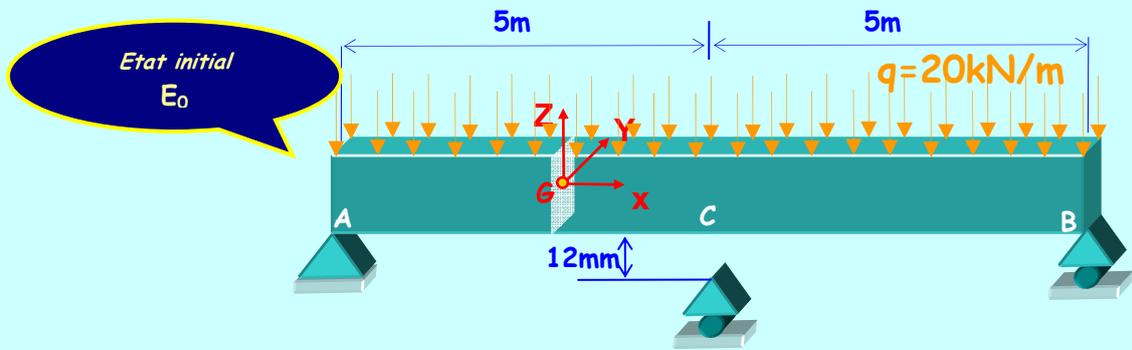


PROBLÈME N° 15



Avant d'appliquer la charge répartie, un espace de 12 mm existe entre la poutre et l'appui C. Sachant que l'inertie de flexion vaut $217 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, calculez (en kN) les réactions sur chaque appui (prendre $E = 200 \text{ GPa}$). On ne tient compte que du moment fléchissant.

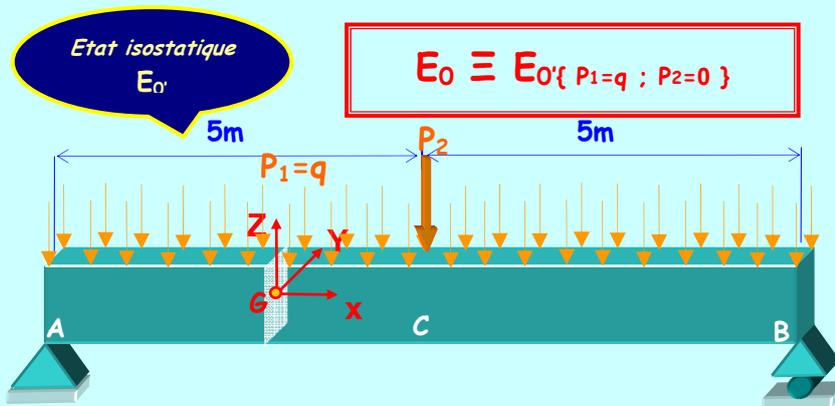
RÉPONSES N° 15



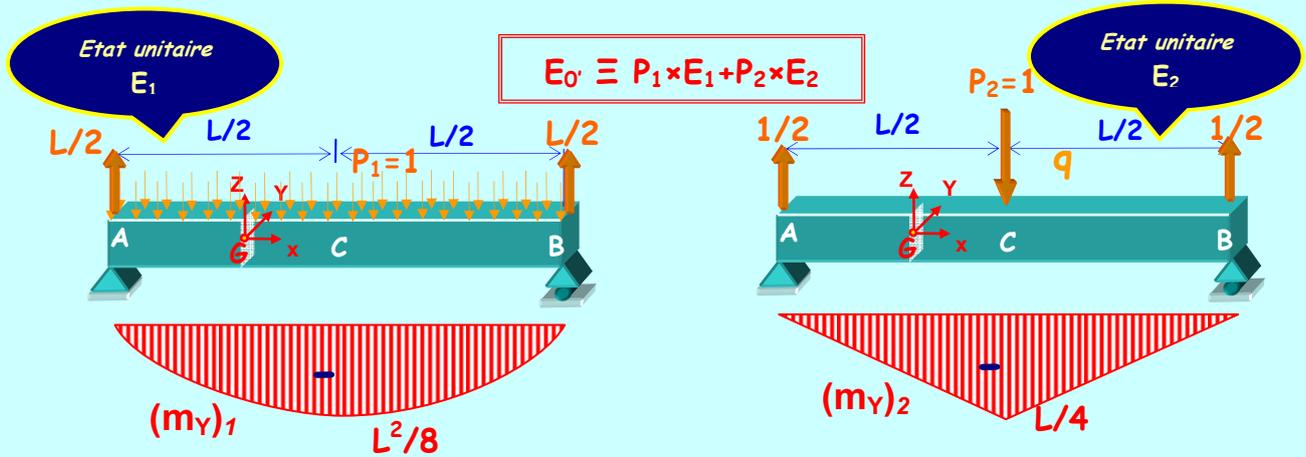
Le problème deviendra hyperstatique externe de degré 1 lorsque la flèche verticale de la section C sera égale à 12 mm.

Calculons donc la part de la charge répartie q qui donne une flèche égale à 12mm.

Nous devons donc constituer un état E_0' pour lequel nous rajoutons une force verticale en C



Décomposons en deux états unitaires :



Dans l'état E_0 $D_2 = \delta_v^C = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$

Calcul des coefficients d'influence $f_{ij} = \int_0^L \left(\frac{(m_Y)_i (m_Y)_j}{EI_Y} \right) dx$ à l'aide des intégrales de Mohr :

Calcul de f_{22} : $f_{22} = \int_A^B \frac{(m_Y)_2^2}{EI_Y} dx$

$$f_{22} = \left\{ \frac{1}{EI_Y} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{L}{4} \right)^2 \times L \right\}$$

$$f_{22} = \frac{L^3}{48EI_Y}$$

$$f_{22} = 1/EI_Y \left(\int \frac{L}{L/4} \right)^2$$

Calcul de f_{12} : $f_{12} = \int_A^B \frac{(m_Y)_1 (m_Y)_2}{EI_Y} dx$

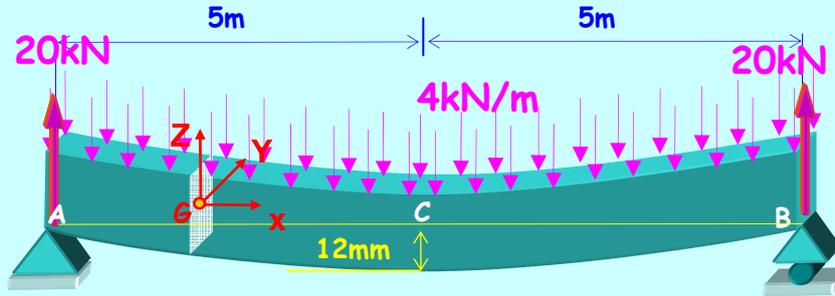
$$f_{12} = 1/EI_Y \left(\int \frac{L}{L^2/8} \times \frac{L}{L/4} \right)$$

$$f_{12} = + \frac{1}{EI_Y} \left\{ \frac{5}{12} \times \frac{L}{4} \times \left(\frac{L^2}{8} \right) \times L \right\} \quad f_{12} = + \frac{5L^4}{384EI_Y}$$

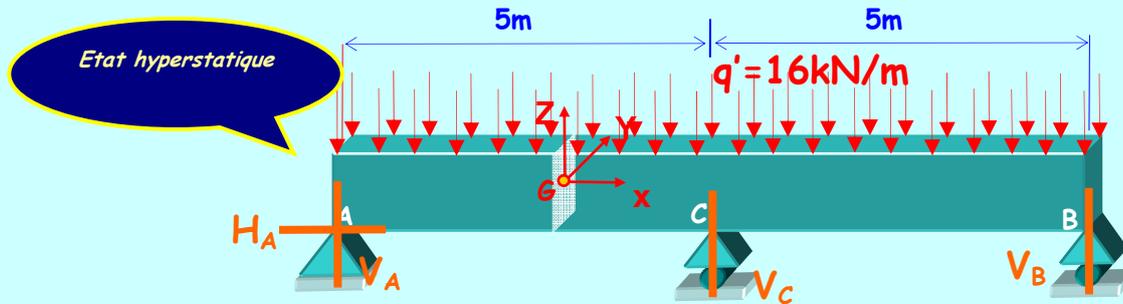
Dans l'état E_0 $D_2 = \delta_v^A = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$ $D_2 = \delta_v^A = \frac{5L^4 P_1}{384EI_Y} + \frac{L^3 P_2}{48EI_Y}$

Dans l'état E_0 $\delta_v^A = \frac{5L^4 q}{384EI_Y} \Rightarrow q = \frac{384EI_Y \delta_v^A}{5L^4} = \frac{384 \times 200.10^3 \times 217.10^6 \times 12}{5 \times (10^4)^4} = 4Nmm^{-1}$

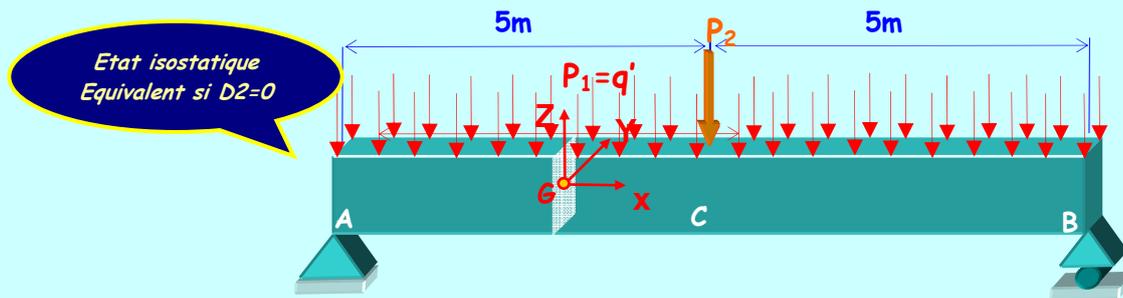
Un chargement réparti de 4N par mm, c'est-à-dire 4kN/m procure une flèche de 12mm/
 Le chargement total est donc pour 10 m de 40kN. Chaque réaction vaut donc 20kN.



Il subsiste donc une charge répartie de 16 kN supportée par les 3 appuis A, C, et B :



Le système est hyperstatique externe de degré 1. Choisissons comme inconnue hyperstatique, la réaction verticale en C et constituons un système isostatique équivalent :



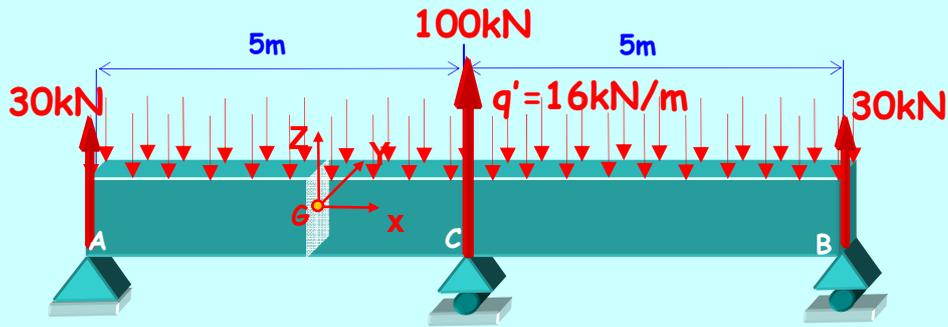
Compte tenu des résultats obtenus précédemment :

$$D_2 = \delta_v^A = f_{21}P_1 + f_{22}P_2 \quad D_2 = \delta_v^A = \frac{5L^4P_1}{384EI_Y} + \frac{L^3P_2}{48EI_Y} = 0$$

$$P_2 = -\frac{5L^4P_1 48EI_Y}{384EI_Y L^3} = -\frac{5P_1 L}{8}$$

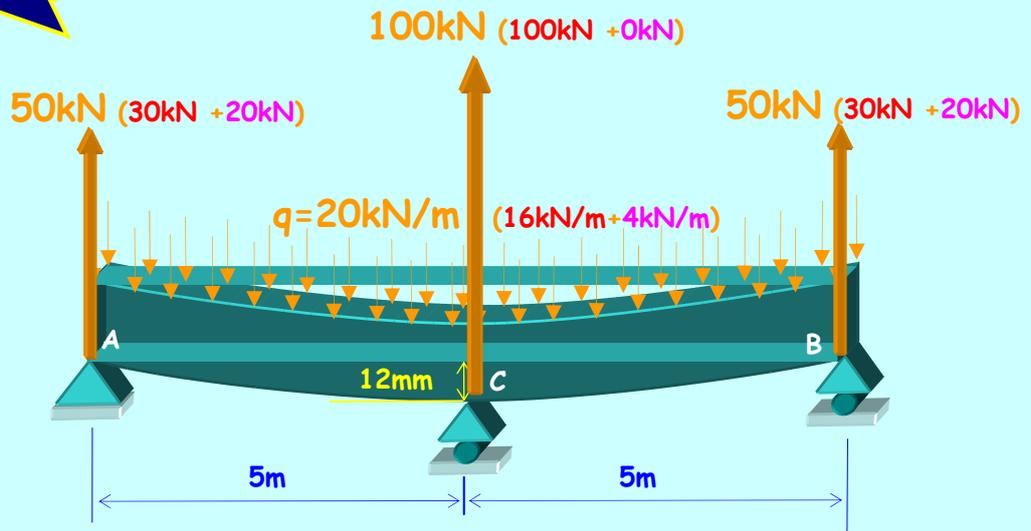
La réaction verticale en C dans l'hyperstatique vaut donc : $V_C = -\frac{5q'L}{8} = -\frac{5 \times 16 \times 10}{8} = -100kN$

Les deux autres réaction verticales en A et B sont égales (symétrie), et valent en écrivant l'équilibre : $V_A = V_B = -$

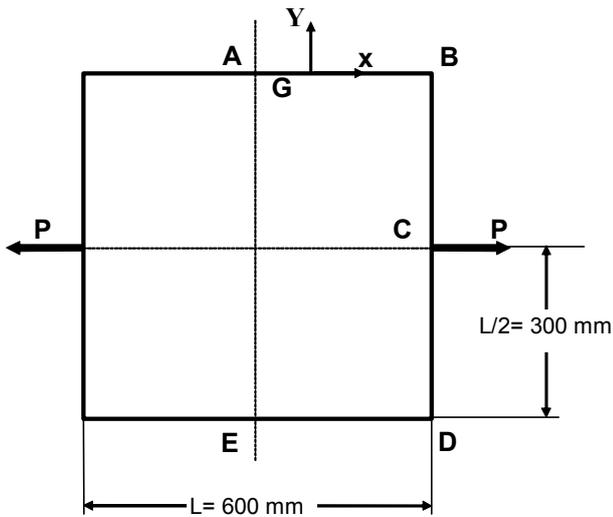


Nous pouvons maintenant revenir au problème initial en superposant les résultats obtenus respectivement sur l'état isostatique et sur l'hyperstatique.

Etat initial
E₀



PROBLÈME N°16



Considérons le cadre fermé ci-contre. Le système est hyperstatique. On ne tient compte que du moment fléchissant pour résoudre le système.

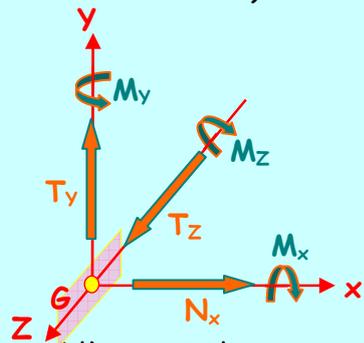
Déterminez le moment de flexion maximum (en Nmm), la contrainte de flexion maximum (en MPa) et l'allongement du cadre (en mm).

La section droite du cadre est rectangulaire 8x25. Le matériau est un acier dont le module de YOUNG vaut 210 GPa. La force P vaut 50 N.

RÉPONSES N°16

Le cadre est statiquement déterminé, et en équilibre sous l'action des deux charges P. Par contre il est impossible de déterminer les actions internes du Torseur de section (ou de Cohésion) compte tenu qu'il est fermé.

En effet nous ne pouvons pas mettre en équilibre un tronçon isolé, puisque nous ne pouvons pas définir un Amont ou un Aval par rapport à une coupure (Le cadre est fermé).



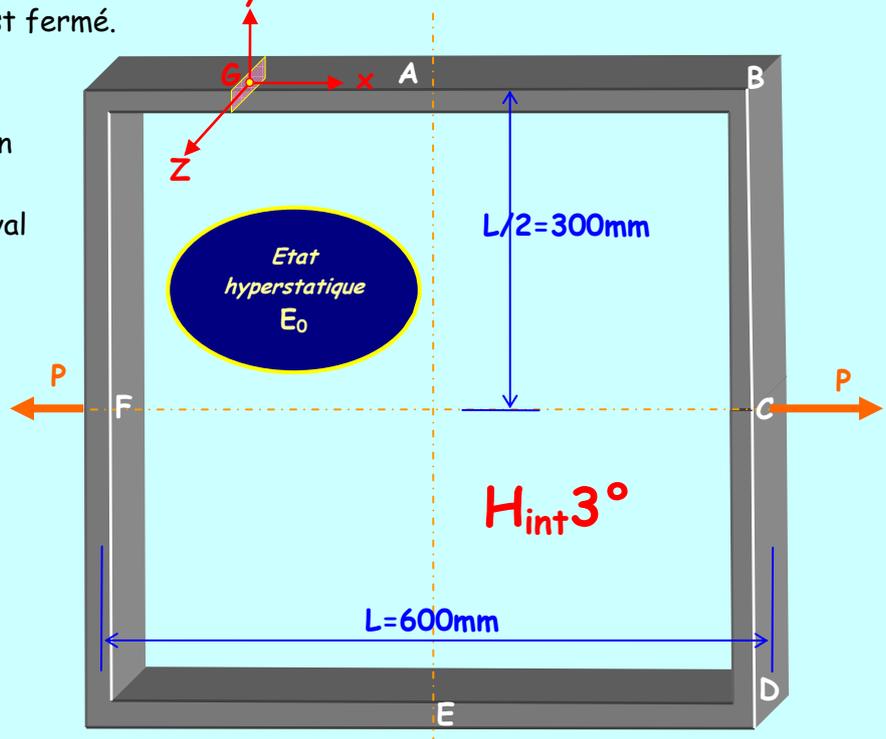
Le problème est plan :

$T_z = M_x = M_y = 0$

Les inconnues sont :

$N_x ; T_y ; M_z$.

Le système est *Hyperstatique Interne de degré 3*, car les inconnues que nous ne pouvons calculer sont les sollicitations du Torseur de Section.



Rendons le système isostatique en y pratiquant un nombre de coupures simples, égal à son degré d'hyperstaticité.

Le cadre étant $H_{int} 3^\circ$ faisons une coupure totale dans une section quelconque H (triple : $N_x ; T_y ; M_z$)

H devient H' et H''

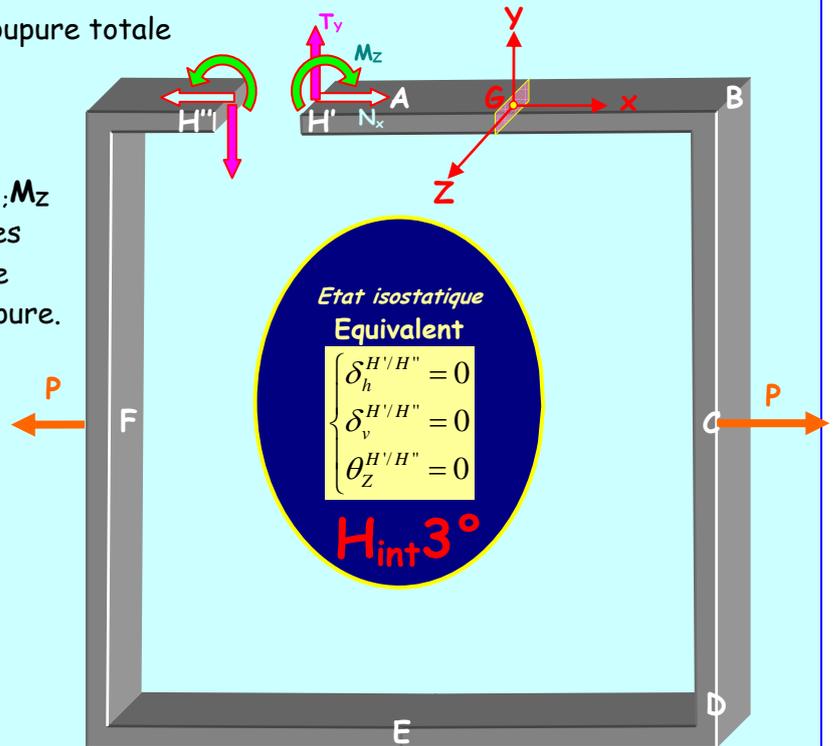
Appliquons des sollicitations $N_x ; T_y ; M_z$ aux deux lèvres de la coupure, égales et opposées et d'intensité telles que nous refermions exactement la coupure.

$$\delta_h^{H'/H''} = 0$$

$$\delta_v^{H'/H''} = 0$$

$$\theta_z^{H'/H''} = 0$$

Ce sont des déplacements relatifs



Nous pouvons simplifier la résolution en se souvenant qu'un axe de symétrie nous permet d'abaisser le degré d'hyperstaticité du système.

Faisons intervenir l'axe de symétrie vertical AE en considérant la coupure en A :

A devient A' et A''

Appliquons des sollicitations $N_x ; T_y ; M_z$ aux deux lèvres de la coupure, égales et opposées.

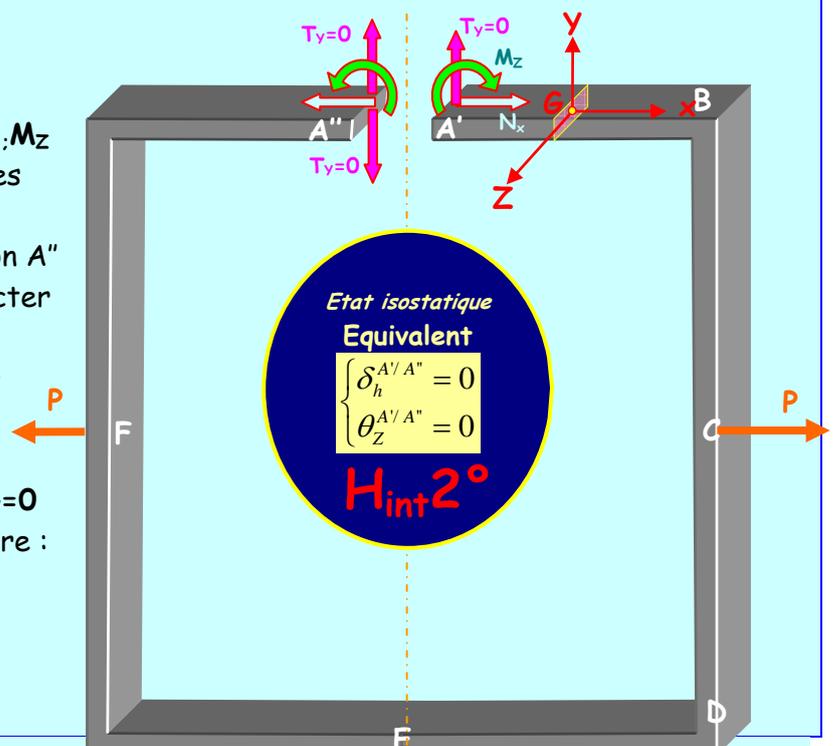
L'effort tranchant T_y dans la section A'' est vertical descendant pour respecter le principe d'action mutuelle.

Il doit être vertical ascendant pour respecter la condition de symétrie.

La seule valeur possible est donc $T_y=0$
Pour refermer exactement la coupure :

$$\delta_h^{H'/H''} = 0$$

$$\theta_z^{H'/H''} = 0$$



Faisons intervenir les 2 axes de symétrie (vertical et horizontal) en considérant la coupure en A et en E:

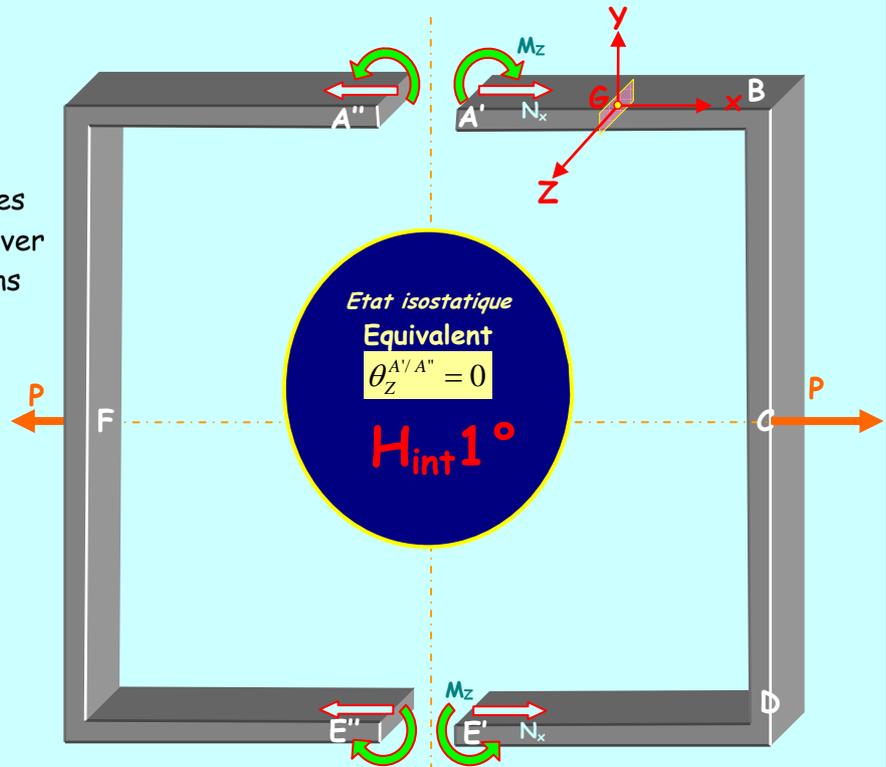
A devient A' et A''

E devient E' et E''

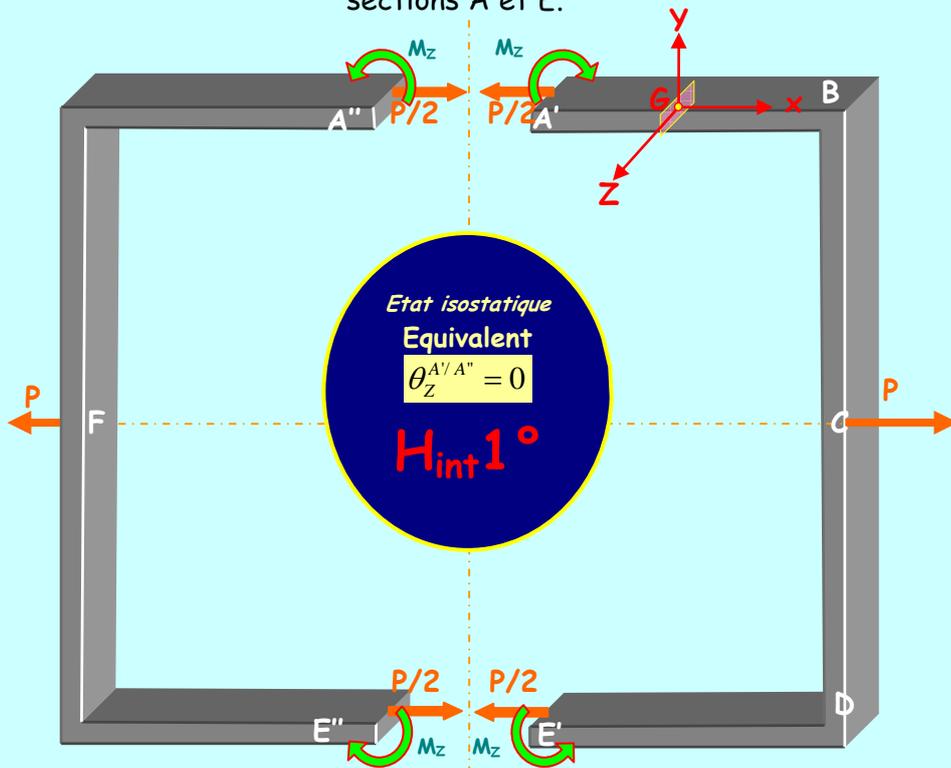
L'équilibre de l'une ou l'autre des 2 parties, nous permet de trouver la valeur de l'effort normal dans les 2 sections : $N_x = P/2$

Pour refermer exactement la coupure :

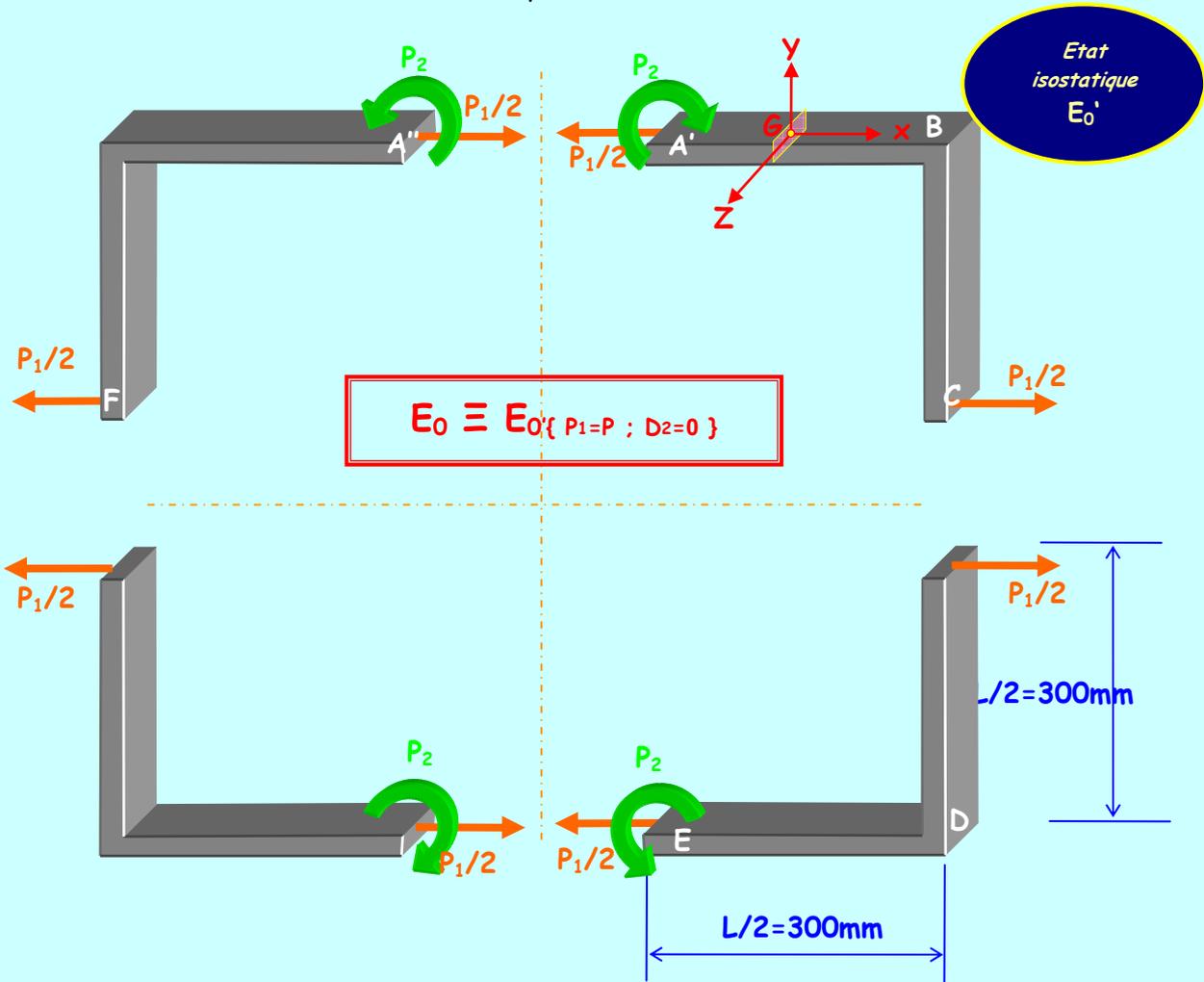
$$\theta_Z^{A'/A''} = \theta_Z^{E'/E''} = 0$$



Nous devons donc calculer la rotation relative de A' par rapport à A'' suivant l'axe Z. Lorsque ce déplacement sera nul le moment s'identifiera avec le moment fléchissant dans les sections A et E.



Compte tenu des axes de symétrie, pour calculer ces rotations, nous allons raisonner sur le quart du cadre.

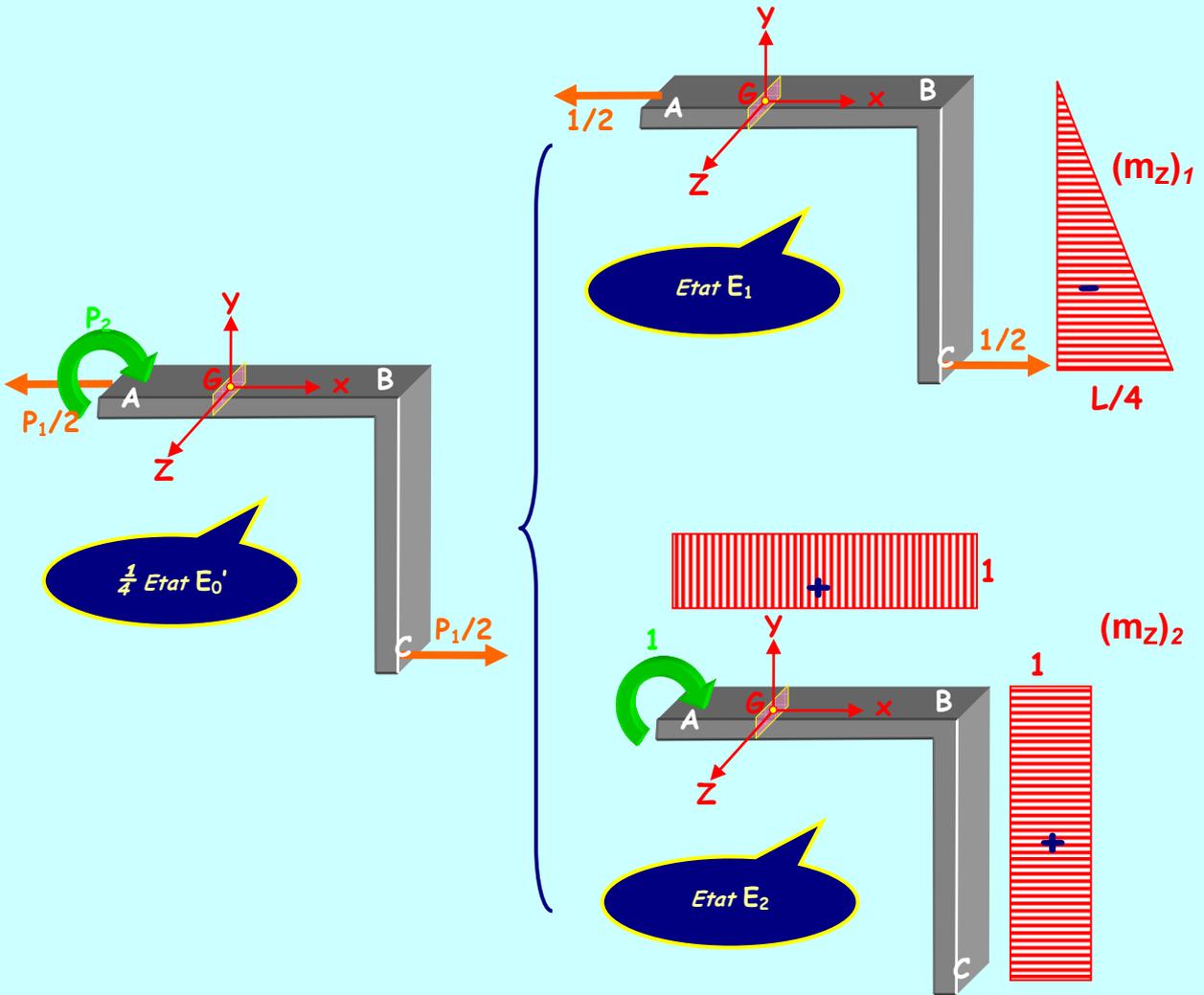


Décomposons l'état isostatique E_0 en 2 états unitaires, afin de calculer D_2 , à l'aide de Maxwell-Mohr.

Dans l'état E_0 $[D]_{E_0} = [f]_{E_0} [P]_{E_0}$ $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} \delta_h^{C/F} \\ \theta_Z^{A'/A''} \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$

$$D_2 = \theta_Z^{A'/A''} = f_{21}P_1 + f_{22}P_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = -\frac{f_{21}P_1}{f_{22}}$$

Calcul des coefficients d'influence $f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(m_Z)_i (m_Z)_j}{EI_Z} \right) dx$ à l'aide des intégrales de Mohr :



Calcul de f_{22} :

$$f_{22} = 4 \times \left(\int_A^B \frac{(m_z)_2^2}{EI_z} dx + \int_B^C \frac{(m_z)_2^2}{EI_z} dx \right)$$

$$f_{22} = 4/EI_z \left(\int_0^{L/2} 1^2 dx \right)^2 + 4/EI_z \left(\int_{L/2}^L 0^2 dx \right)^2$$

$$f_{22} = 8 \left\{ \frac{1}{EI_z} \times 1^2 \times \frac{L}{2} \right\}$$

$$f_{22} = \frac{4L}{EI_z}$$

Calcul de f_{12} :

$$f_{12} = 4 \times \left(\int_A^B \frac{(m_z)_1 (m_z)_2}{EI_z} dx + \int_B^C \frac{(m_z)_1 (m_z)_2}{EI_z} dx \right)$$

$$f_{12} = 4/EI_z \left(\int_0^{L/2} \frac{L}{2} \times 1 dx \right)$$

$$f_{12} = -\frac{4}{EI_z} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{L}{4} \times 1 \times \frac{L}{2} \right\}$$

$$f_{12} = -\frac{L^2}{4EI_z}$$

Dans l'état E_0 $D_2 = \theta_Z^{A/A''} = f_{21}P_1 + f_{22}P_2$ $D_2 = \theta_Z^{A/A''} = -\frac{L^2P_1}{4EI_Z} + \frac{4LP_2}{EI_Z}$

Dans l'état E_0 $\theta_Z^{A/A''} = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{PL}{16} \Rightarrow M_Z^A = \frac{PL}{16}$

Pour trouver le diagramme des moments fléchissants, nous utilisons les résultats obtenus sur l'état isostatique E_0 au lieu de tout refaire le problème initial.

$$M_Z(E_0) = P \times m_Z(E_1) + (PL/16) \times m_Z(E_2)$$

$$M_Z^B(E_0) = P \times m_Z^B(E_1) + (PL/16) \times m_Z^B(E_2) = P \times 0 + (PL/16) \times 1 = PL/16$$

$$M_Z^C(E_0) = P \times m_Z^C(E_1) + (PL/16) \times m_Z^C(E_2) = P \times (-L/4) + (PL/16) \times 1 = -3PL/16$$

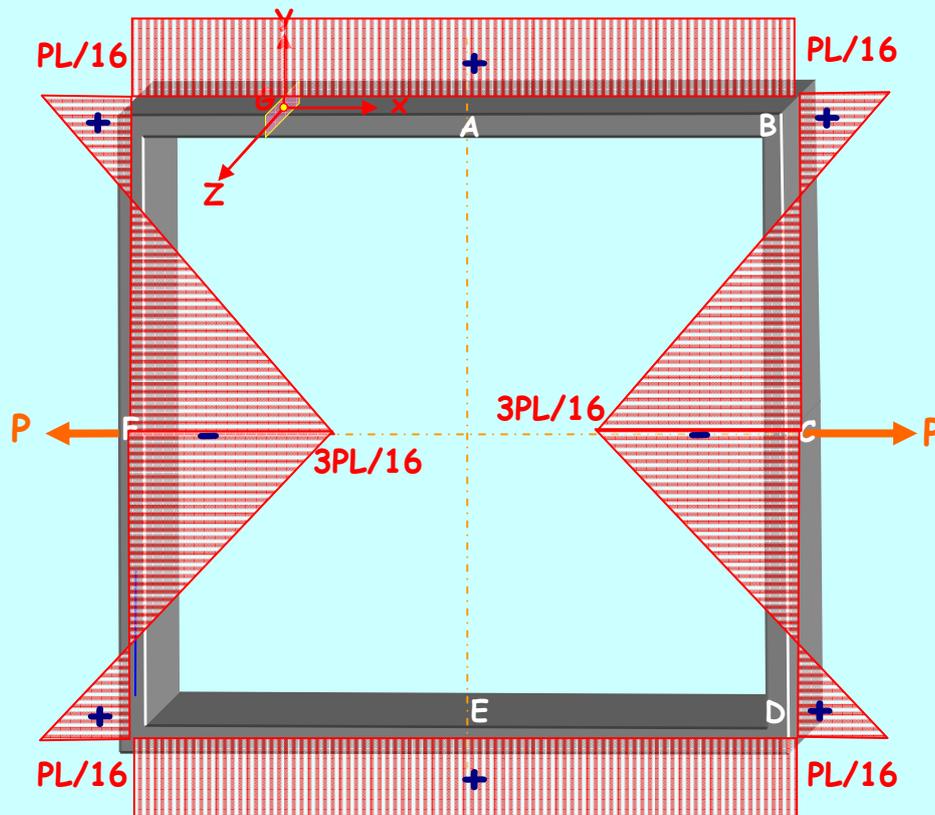


Diagramme des moments fléchissants M_Z

Le moment fléchissant maximum est de $3PL/16$ dans les sections C et F.

$$M_Z^C = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \times 50 \times 600}{16} = 5625 \text{ mmN}$$

$$M_Z^{\max} = 5,625 \text{ mN}$$

La contrainte de flexion maximum vaut :

$$\sigma_{xx}^P = -\frac{M_Z}{I_Z} Y^P = -\frac{3PL}{16} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \pm \frac{9PL}{8bh^2} = \pm \frac{9 \times 50 \times 600}{8 \times 25 \times 8^2} = \pm 21,09 \text{ MPa} \quad \sigma_{xx}^{\max} = \pm 21,1 \text{ MPa}$$

Allongement du cadre :

Il nous faut donc déterminer le déplacement relatif des sections C par rapport à F horizontalement. Nous allons encore travailler avec l'état E_0' .

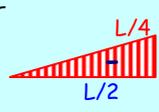
Dans l'état E_0'
$$[D]_{E_0'} = [f]_{E_0'} [P]_{E_0'} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} \delta_h^{C/F} \\ \theta_Z^{A'/A''} \end{bmatrix}_{E_0'} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0'}$$

$$D_1 = \delta_h^{C/F} = f_{11}P_1 + f_{12}P_2$$

Dans l'état E_0
$$\delta_h^{C/F} = f_{11}P + f_{12}\left(\frac{PL}{16}\right)$$

Nous devons donc calculer f_{11} .

Calcul de f_{11} :
$$f_{11} = 4 \times \left(\int_A^B \frac{((m_Z)_1)^2}{EI_Z} dx + \int_B^C \frac{((m_Z)_1)^2}{EI_Z} dx \right)$$

$$f_{11} = 4/EI_Z \left(\begin{array}{c} \text{L/4} \\ \text{L/2} \end{array} \right)^2$$


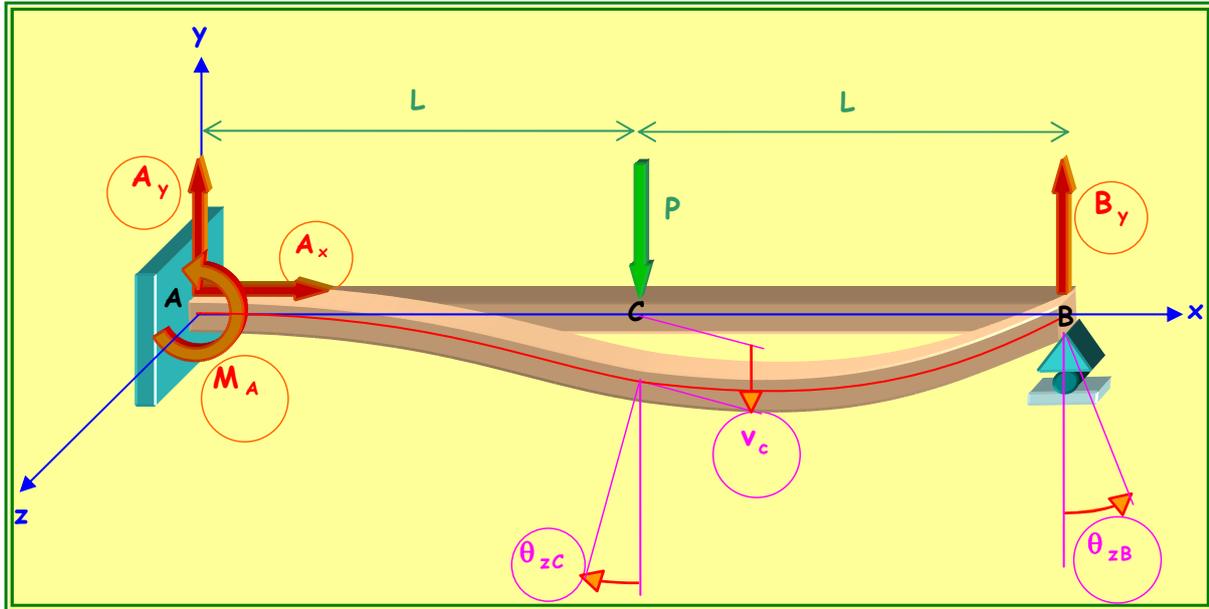
$$f_{11} = 4 \left\{ \frac{1}{EI_Z} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{L}{4}\right)^2 \times \frac{L}{2} \right\} \quad f_{11} = \frac{L^3}{24EI_Z}$$

$$\delta_h^{C/F} = \frac{L^3}{24EI_Z} P - \frac{L^2}{4EI_Z} \times \left(\frac{PL}{16}\right) \quad \delta_h^{C/F} = \frac{5PL^3}{192EI_Z} = \frac{5 \times 50 \times 600^3 \times 12}{192 \times 210 \cdot 10^3 \times 25 \times 8^3} = 1,26 \text{ mm}$$

Allongement du cadre :
$$\delta_h^{C/F} = 1,26 \text{ mm}$$

CALCUL DES STRUCTURES PAR LES MÉTHODES ÉNERGÉTIQUES

1. DUALITÉ FORCES-DÉPLACEMENTS :



Soit à résoudre la structure **plane** ci-dessus. Les inconnues du problème peuvent se classer en deux catégories :

- Les **inconnues statiques** : les quatre réactions A_x , A_y , M_{Az} et B_y . Le système comportant quatre inconnues statiques pour trois équations d'équilibre est hyperstatique de degré 1.

- Les **inconnues cinématiques** : les déplacements v_c , θ_{zB} et θ_{zC} .
Pour résoudre le problème on peut procéder de deux façons **inverses** l'une de l'autre.

1°) La méthode des forces :

La méthode des forces consiste à calculer d'abord les **4 inconnues statiques** A_x , A_y , M_{Az} et B_y (**inconnues primaires**), puis les **3 inconnues cinématiques** v_c , θ_{zB} et θ_{zC} (**inconnues secondaires**).

2°) La méthode des déplacements :

La méthode consiste à calculer d'abord les **3 inconnues cinématiques** v_c , θ_{zB} et θ_{zC} (**inconnues primaires**), puis les **4 inconnues statiques** A_x , A_y , M_{Az} et B_y (**inconnues secondaires**).

Dans un cas comme dans l'autre (méthode des forces ou des déplacements), la méthode de calcul est essentiellement matricielle et est basée sur le principe de conservation de l'énergie :

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{déf}}$$

Le travail du torseur extérieur se calcule par :

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} [P][D]$$

Si la structure est une poutre l'énergie de déformation se calcule par :

$$W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dv$$

Dans la méthode des forces (ou méthode de la flexibilité) le système matriciel se présente sous la forme :

$$[D] = [f][P]$$

La matrice symétrique $[f]$ est la matrice de flexibilité de la structure. Le vecteur $[P]$ contient les charges appliquées sur la structure **et les inconnues hyperstatiques**. Le vecteur $[D]$ contient les déplacements associés.

Dans la méthode des déplacements (ou méthode de la rigidité) le système matriciel se présente sous la forme :

$$[P] = [k][D]$$

La matrice symétrique $[k]$ est la matrice de rigidité de la structure. Le vecteur $[P]$ contient les charges appliquées **et les inconnues hyperstatiques**. Le vecteur $[D]$ contient les déplacements associés.

Ces deux méthodes sont **inverses** l'une de l'autre :

$$[k]^{-1} = [f]$$

Il existe des méthodes spécifiques (exposées dans la suite de ce chapitre) pour calculer :

- La matrice de flexibilité [f] :

▶ Méthode de la « **charge unité** » (ou méthode de MAXWELL-MOHR).

- La matrice de rigidité [k] :

▶ Méthode du « **déplacement unité** », qui est l'inverse de la méthode de la « charge unité ».

▶ Méthode des « **Éléments Finis** ».

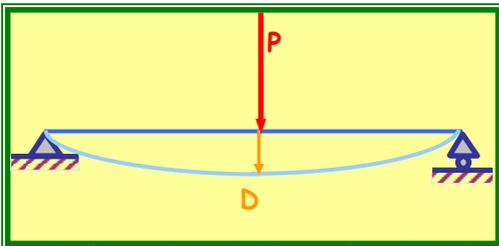
Dans la « Méthode des Éléments Finis » le vecteur [P] **contient toutes les charges** (y compris les **réactions isostatiques**) et le vecteur [D] **tous les déplacements associés**. La matrice de rigidité « globale », symétrique, est alors notée [K]. Elle est donc d'un ordre plus grand (+3 dans le plan et +6 dans l'espace) que la matrice de rigidité [k] calculée avec la méthode du déplacement unité.

2. MÉTHODE DES FORCES OU DE LA FLEXIBILITÉ DE LA STRUCTURE:

2.1. Méthode de CLAPEYRON :

2.1.1. Définition :

C'est une méthode analytique permettant de calculer dans des **systèmes isostatiques** soumis à **une seule charge** le déplacement associé (qui fait travailler) la charge.



A titre d'exemple on peut traité le cas d'une barre droite soumise à une seule charge P.

Le travail du torseur extérieur vaut :

$$W_{ext} = \frac{1}{2}PD$$

Le travail de déformation élastique vaut :

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dv$$

Le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$W_{ext} = W_{def}$$

$$\frac{1}{2}PD = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dv$$

$$D = \frac{1}{P} \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dv$$

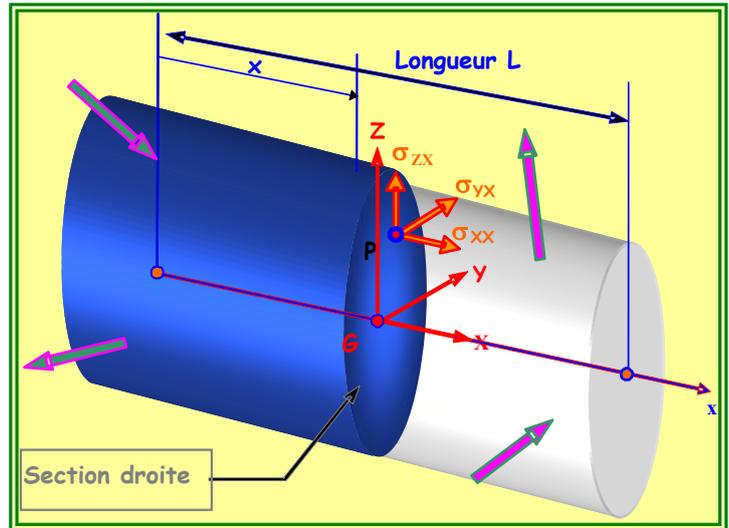
2.1.2. Expression de l'énergie de déformation élastique dans une structure à barres (droites) en fonction des efforts internes dans les barres :

$$\sigma = \sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{M_y}{I_y} Z$$

$$\sigma_{yx} = \frac{T_y}{A} - \frac{M_x}{I_G} Z$$

$$\sigma_{zx} = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{I_G} Y$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_{yx}^2 + \sigma_{zx}^2}$$



N.B. La contrainte due à l'effort tranchant est la contrainte moyenne. Les axes Y et Z sont les axes principaux d'inertie de la section droite.

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dv$$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{M_y}{I_y} Z \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\left(\frac{T_y}{A} - \frac{M_x}{I_G} Z \right)^2 + \left(\frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{I_G} Y \right)^2 \right) \right\} dv$$

Compte tenu que les composantes du torseur de section sont constantes dans la section droite qui est elle-même constante le long de la barre :

$$\int_V \{ \} dv = \int_0^L \left[\int_A \{ \} dA \right] dx$$

$$W_{def} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_A \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{M_y}{I_y} Z \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\left(\frac{T_y}{A} - \frac{M_x}{I_G} Z \right)^2 + \left(\frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{I_G} Y \right)^2 \right) \right\} dA \right] dx$$

En développant, et compte tenu que :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A dA \\
 I_Y &= \int_A Z^2 dA \\
 I_Z &= \int_A Y^2 dA \\
 I_G &= \int_A (Y^2 + Z^2) dA \\
 I_{YZ} &= \int_A YZ dA = 0 \\
 Q_Y &= \int_A Z dA = Z_G A = 0 \\
 Q_Z &= \int_A Y dA = Y_G A = 0
 \end{aligned}$$

On obtient l'expression de l'énergie de déformation élastique dans une barre en fonction des composantes du torseur de section :

$$W_{\text{déf}} = \int_0^L \left(\frac{N_x^2}{2EA} + \frac{T_y^2}{2GA} + \frac{T_z^2}{2GA} + \frac{M_x^2}{2GI_G} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right) dx$$

Si la structure comporte plusieurs barres :

$$W_{\text{déf}} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{N_x^2}{2EA} + \frac{T_y^2}{2GA} + \frac{T_z^2}{2GA} + \frac{M_x^2}{2GI_G} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right) dx$$

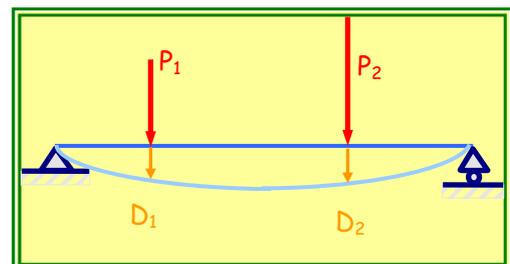
2.2. Méthode de MAXWELL-MOHR ou méthode dite de la "charge unité" :

C'est une méthode matricielle qui permet de résoudre les systèmes hyperstatiques et de calculer des déplacements quelconques dans des systèmes isostatiques ou hyperstatiques.

2.2.1. Matrice de flexibilité d'une structure à barres:

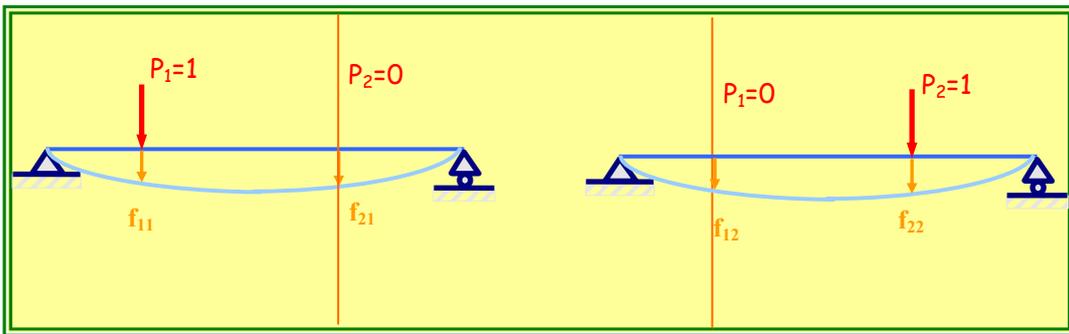
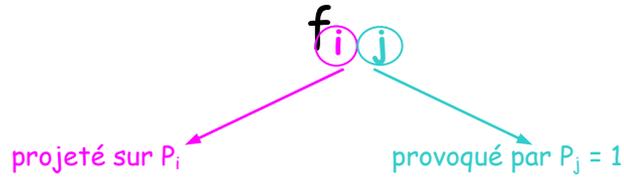
1°) Définition :

Considérons une barre droite soumise à deux forces P_1 et P_2 . Notons D_1 et D_2 les déplacements associés (qui font travailler) les deux forces.



Décomposons l'état initial en deux états unitaires (les forces valent 1). Dans un cas plus général on décompose l'état initial en autant d'états unitaires qu'il y a de charges appliquées.

On note alors f_{ij} les déplacements D_1 et D_2 dans les états 1 et 2 avec la signification suivante pour les indices i et j :



Etat 1 : $P_1=1, P_2=0$

Etat 2 : $P_2=1, P_1=0$

Les principes de superposition et de linéarité des effets des forces permettent d'écrire :

$$D_1 = \underbrace{f_{11}P_1 + f_{12}P_2}_{\text{linéarité}}$$

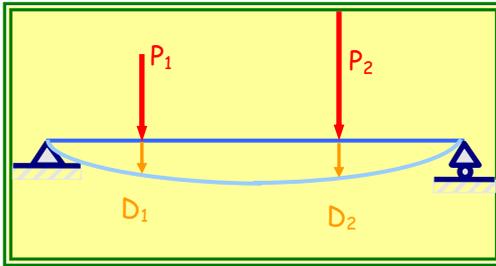
superposition

$$D_2 = f_{21}P_1 + f_{22}P_2 \quad \text{Ou encore, sous forme matricielle : } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[D] = [f][P]}$$

La matrice carrée $[f]$ est la matrice de flexibilité de la structure.

2°) Théorème de MAXWELL-BETTI :



Considérons une barre droite soumise à deux forces \$P_1\$ et \$P_2\$. Notons \$D_1\$ et \$D_2\$ les déplacements associés (qui font travailler) les deux forces.

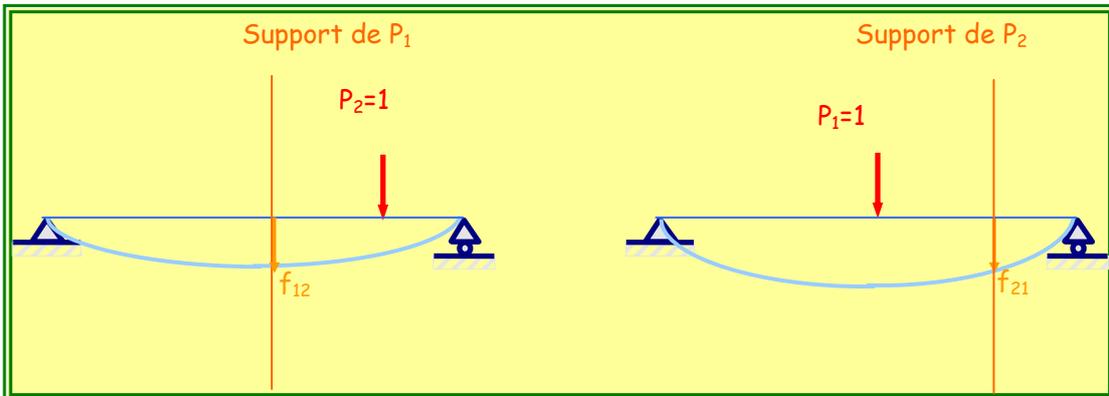
En calculant le travail du torseur extérieur en appliquant : 1°) \$P_1\$ puis \$P_2\$. ou 2°) \$P_2\$ puis

\$P_1\$ et en identifiant les 2 expressions, on démontre que :

La matrice de flexibilité est symétrique.

$${}^t[f] = [f]$$

Autrement dit, le déplacement projeté sur \$P_1\$ et provoqué par \$P_2=1\$ (\$f_{12}\$) est égal au déplacement projeté sur \$P_2\$ et provoqué par \$P_1=1\$ (\$f_{21}\$).



$$f_{12} = f_{21}$$

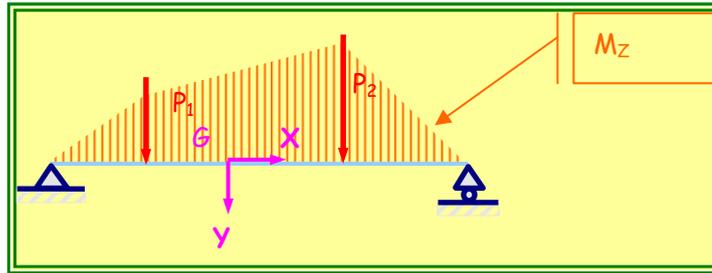
2.2.2. Expression du travail du torseur extérieur en fonction de la matrice de flexibilité :

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} {}^t[P][D] \text{ et } [D] = [f][P]$$

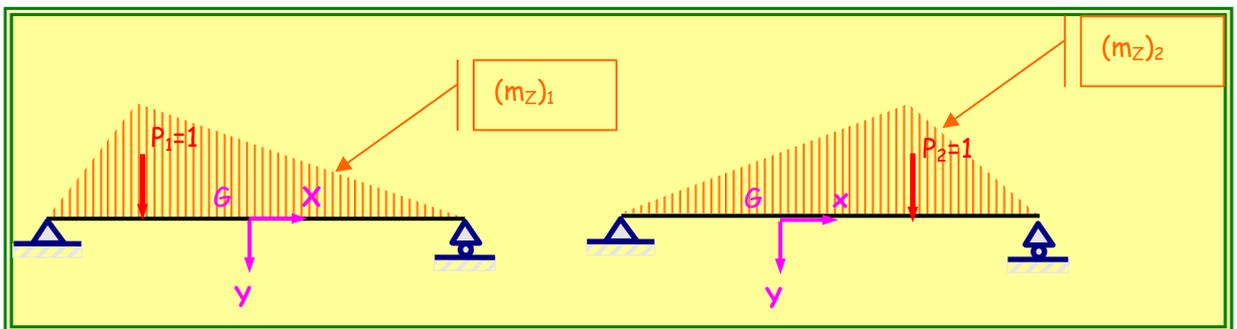
$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} {}^t[P][f][P]$$

2.2.3. Calcul des termes de la matrice de flexibilité:

Considérons une barre droite soumise à deux forces P_1 et P_2 .



Décomposons l'état initial en deux états unitaires (les forces valent 1).



Etat 1 : $P_1=1, P_2=0$

Etat 2 : $P_2=1, P_1=0$

On ne considère pour la démonstration que le moment fléchissant M_z . La démonstration est identique pour les autres sollicitations.

Les principes de superposition et de linéarité des effets des forces permettent d'écrire :

superposition

$$M_z = \underbrace{(m_z)_1 P_1 + (m_z)_2 P_2}_{\text{linéarité}} \quad W_{\text{déf}} = \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} {}^t [P] [f] [P]$$

Le principe de conservation de l'énergie ($W_{\text{ext}} = W_{\text{déf}}$), permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions de W_{ext} et $W_{\text{déf}}$ et en généralisant aux six sollicitations et pour un système comportant plusieurs barres on obtient :

$$f_{ij} = \sum_{\text{barres}} \int_0^L \left(\frac{(n_x)_i (n_x)_j}{EA} + \frac{(t_y)_i (t_y)_j}{GA} + \frac{(t_z)_i (t_z)_j}{GA} + \frac{(m_x)_i (m_x)_j}{GI_x} + \frac{(m_y)_i (m_y)_j}{EI_y} + \frac{(m_z)_i (m_z)_j}{EI_z} \right) dx$$

2.3. Méthode de CASTIGLIANO :

C'est une méthode analytique qui permet de résoudre les systèmes hyperstatiques et de calculer des déplacements quelconques dans des systèmes isostatiques ou hyperstatiques.

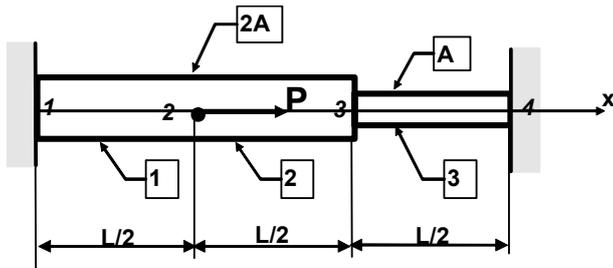
$$W_{ext} = \frac{1}{2} [P][f][P] \quad \text{et} \quad W_{ext} = W_{déf}$$

$$D_i = \frac{\partial W_{déf}}{\partial P_i}$$

L'énergie de déformation étant exprimée en fonction de toutes les charges, la dérivée partielle de l'énergie de déformation élastique par rapport à l'une quelconque des charges est égale au déplacement associé à la charge.

3. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

PROBLÈME N°17



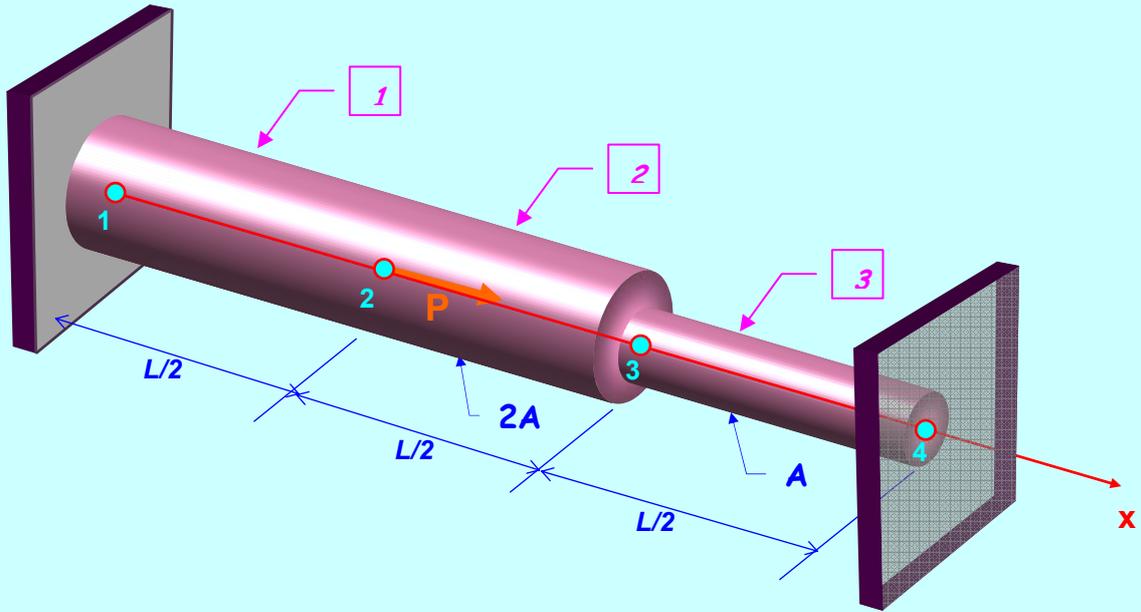
vaut 10 mm^2 .

Considérons la poutre à section droite variable ci-contre. Le module de YOUNG E vaut $2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $L=1 \text{ m}$. La poutre est encastree à ses deux extrémités et est soumise à une charge axiale $P=10 \text{ kN}$. La poutre est discrétisée en trois éléments poutre et quatre nœuds. L'aire A

- 1°) Calculez les matrices de rigidité élémentaire des trois éléments sous la forme : $4 \cdot 10^3 [\]$.
- 2°) Calculez la matrice de rigidité globale de la structure (sous la forme : $4 \cdot 10^3 [\]$).
- 3°) Calculez les déplacements axiaux des nœuds 2 et 3 (en mm), puis les efforts axiaux sur les nœuds 1 et 4 (en kN).
- 4°) Calculez le déplacement axial, la déformation axiale et la contrainte (en MPa) au milieu de l'élément 2.

RÉPONSES N°17

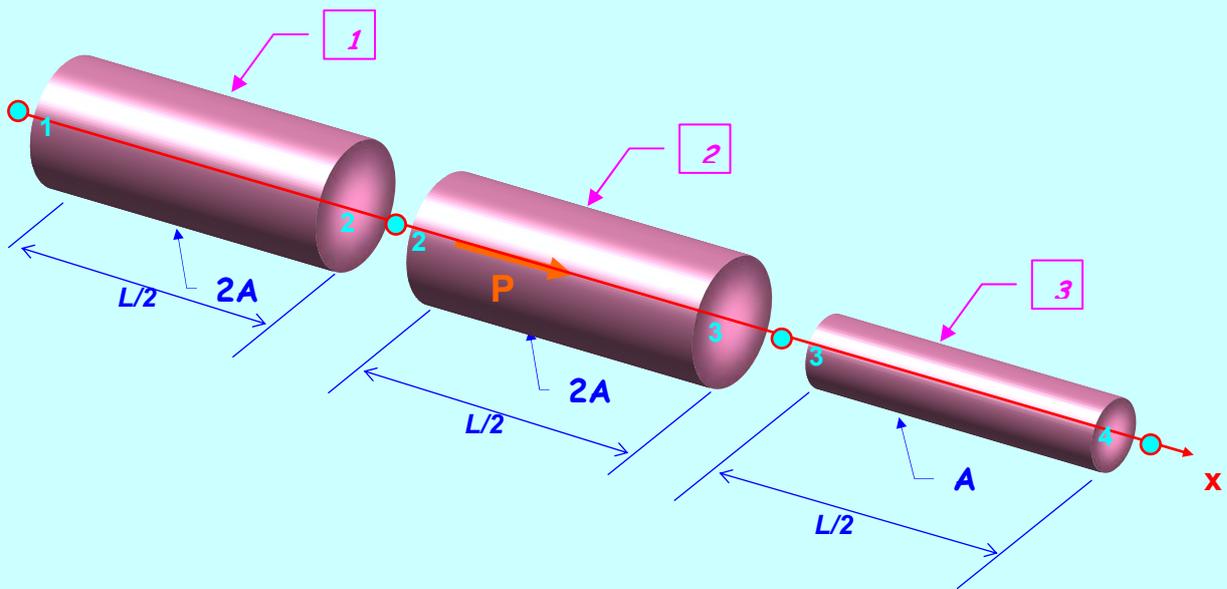
La poutre droite à section variable est encastree à ses deux extrémités. La charge P étant axiale, seules les réactions horizontales existent, et le problème est donc hyperstatique externe de degré 1.



1)
 Discrétisons la poutre en 3 éléments et 4 nœuds . Dans notre cas les axes locaux et globaux coïncident. Chaque élément, compte tenu du chargement, n'est soumis qu'à des efforts normaux. Chaque nœud admet un déplacement u suivant x .

La matrice de rigidité élémentaire en traction-compression $[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ relie les

efforts d'extrémité de l'élément et les déplacements des nœuds $\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$



Calculons les matrices de rigidité élémentaires.

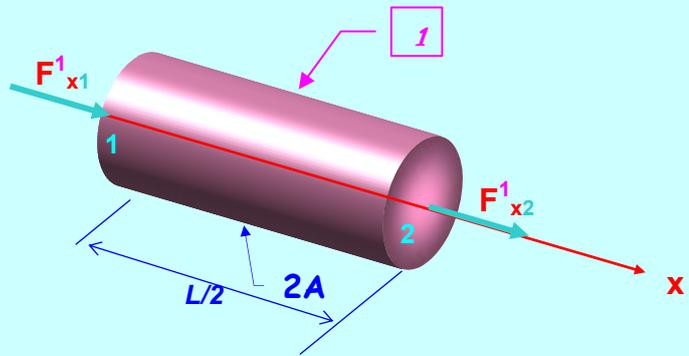
Elément 1 :

$$[k^1] = \frac{E2A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^1] = \frac{2.10^5 \times 2 \times 10}{1000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^1] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



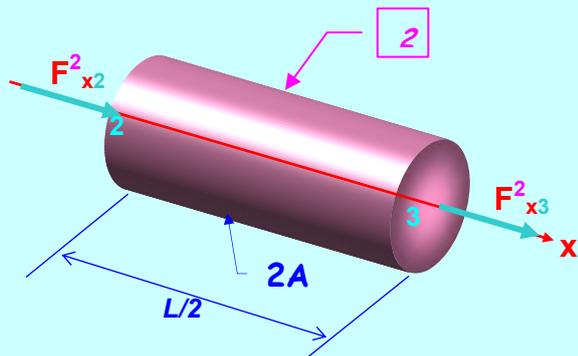
Elément 2 :

$$[k^2] = \frac{E2A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = \frac{2.10^5 \times 2 \times 10}{1000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



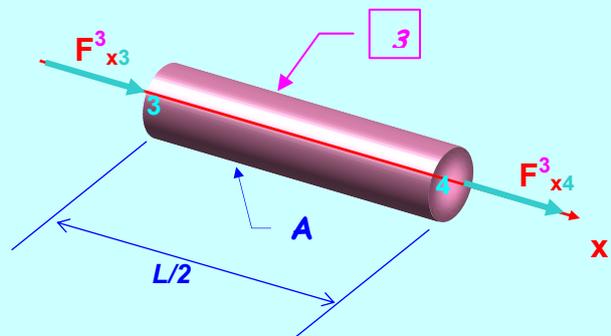
Elément 3 :

$$[k^3] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^3] = \frac{2.10^5 \times 10}{1000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^3] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x3}^3 \\ F_{x4}^3 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$



2)

Détermination de la matrice de rigidité K de la structure :

Procédons à l'assemblage des 3 matrices de rigidité élémentaires :

$$[k^1] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad [k^2] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad [k^3] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3)

D'où : $[P] = [K][D]$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \\ F_{x4} \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Appliquons les conditions limites :

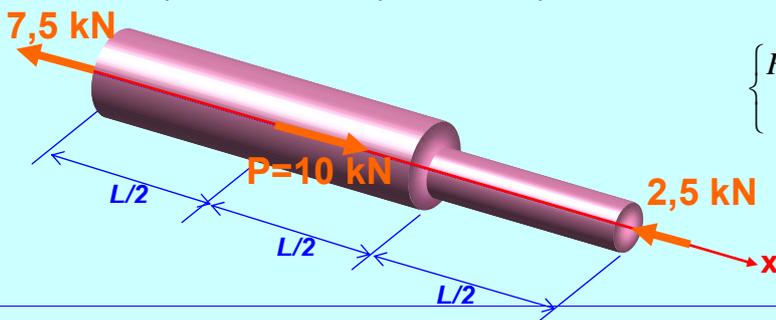
$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ +P \\ 0 \\ F_{x4} \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution des équations 2 et 3 du système nous permet de trouver

$$\begin{cases} P = 4.10^3(4u_2 - 2u_3) \\ 0 = 4.10^3(-2u_2 + 3u_3) \end{cases}$$

$$u_2 = 0.9375mm \quad u_3 = 0.625mm$$

Ces valeurs reportées dans le système nous permettent de résoudre les équations 1 et 4 :



$$\begin{cases} F_{x1} = 4.10^3(-2u_2) = 4.10^3(-2 \times 0,9375) \\ F_{x4} = 4.10^3(-u_3) = 4.10^3(-0,625) \end{cases}$$

$$F_{x1} = -7.5kN \quad F_{x4} = -2.5kN$$

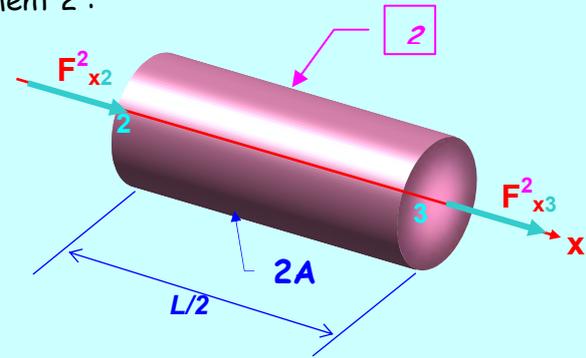
4)

Déterminons les efforts d'extrémités de l'élément 2 :

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9375 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9375 \\ 0,625 \end{bmatrix} = 4.10^3 \begin{bmatrix} 2 \times 0,9375 - 2 \times 0,625 \\ -2 \times 0,9375 + 2 \times 0,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ -2500 \end{bmatrix}$$



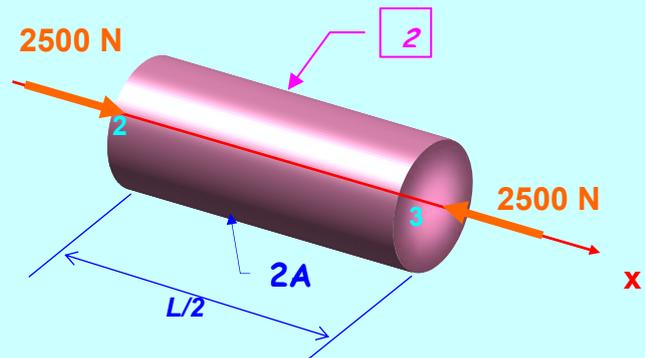
L'élément est donc soumis à un effort de compression de 2,5 kN

La contrainte vaut pour tout point:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} = \frac{-2500}{2 \times 10} = -125 MPa$$

La déformation associée vaut :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{-125}{2.10^5} = 625.10^{-6}$$



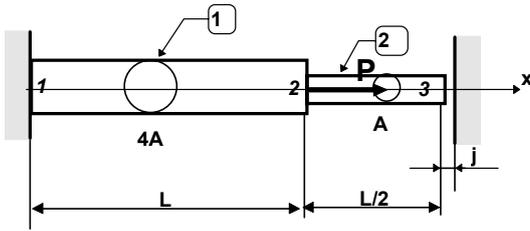
La matrice d'interpolation des déplacements [A] en traction-compression est :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{X}{L} & \frac{X}{L} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = [A][D^2] \qquad u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{X}{L} & \frac{X}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0,78125 mm$$

PROBLÈME N°18



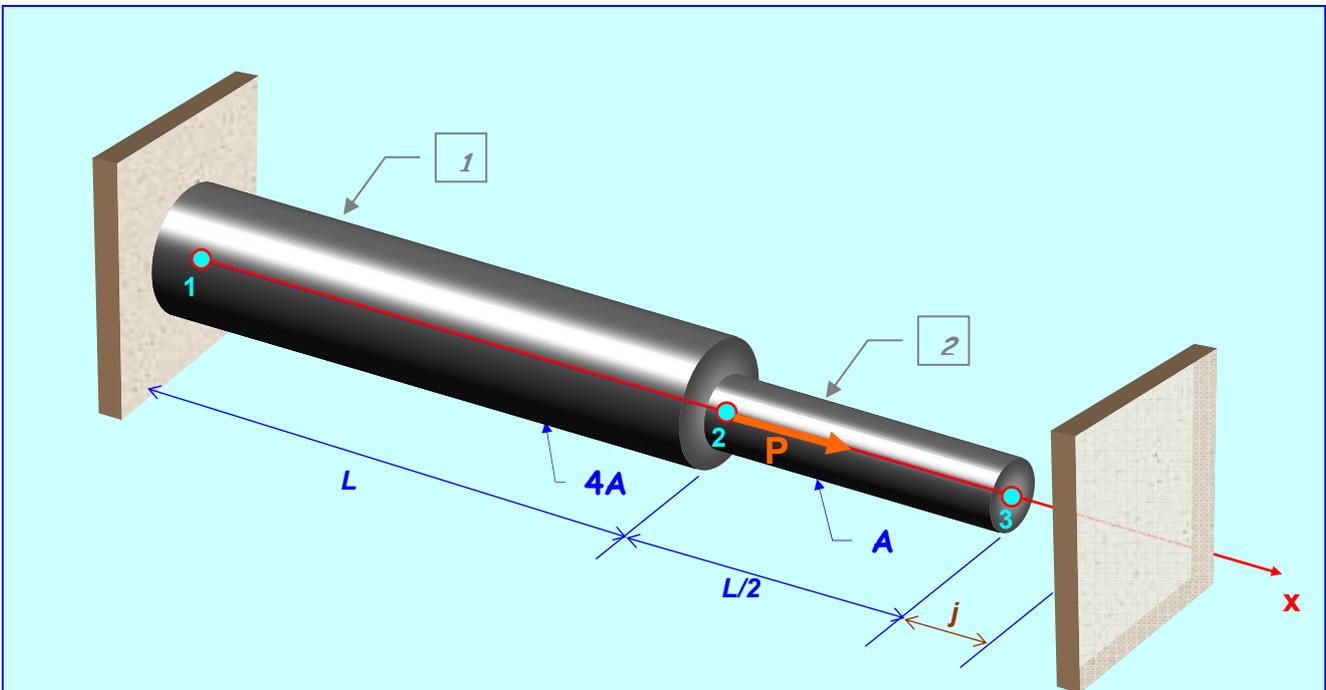
Avant d'appliquer la charge horizontale P un jeu " j " existe entre l'extrémité droite de la poutre et l'appui de droite. La poutre est modélisée par deux éléments "poutre" et trois nœuds.

1°) Déterminer sous forme littérale les matrices de rigidité élémentaires et la matrice de rigidité totale en fonction de L , E et A (mettre $2EA/L$ en facteur).

2°) $E=200\text{GPa}$, $A=5\text{cm}^2$, $L=1\text{m}$ et $P=100\text{kN}$. Calculer:

- a) Le jeu " j " pour que la poutre arrive juste en contact avec la liaison de droite.
- b) Le jeu " j " pour qu'un l'effort de compression de 10kN s'exerce dans l'élément 2.

RÉPONSES N°18



1°)

Discretisons la poutre en 2 éléments et 3 nœuds . Dans notre cas les axes locaux et globaux coïncident. Chaque élément, compte tenu du chargement, n'est soumis qu'à des efforts normaux. Chaque nœud admet un déplacement u suivant x .

La matrice de rigidité élémentaire en traction-compression $[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ relie les

efforts d'extrémité de l'élément et les déplacements des nœuds $\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

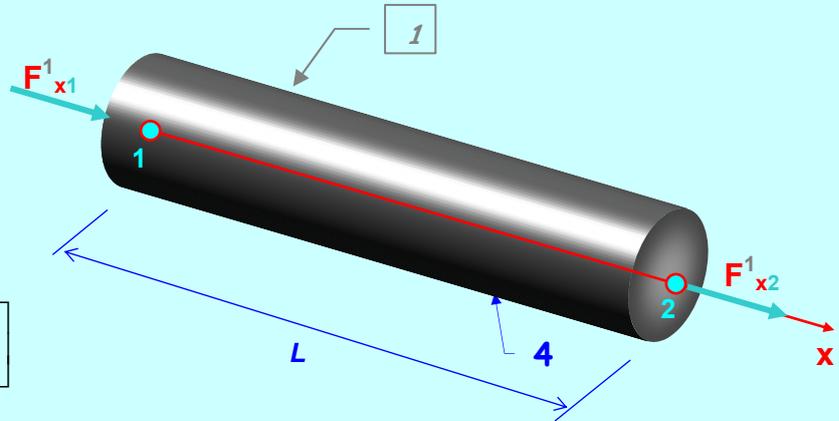
Calculons les matrices de rigidité élémentaires.

Elément 1 :

$$[k^1] = \frac{E4A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^1] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

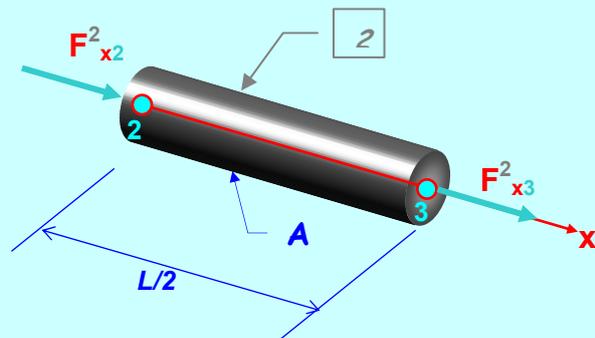


Elément 2 :

$$[k^2] = \frac{EA}{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



Détermination de la matrice de rigidité K de la structure :

Procédons à l'assemblage des 2 matrices de rigidité élémentaires :

$$[k^1] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad [k^2] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1°)

D'où : $[P] = [K][D]$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) Jeu "j" pour que la poutre arrive juste en contact avec la liaison de droite.

Appliquons les conditions limites :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ +P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

La résolution des équations 2 et 3 du système nous permet de trouver u_2 et u_3 .

$$\begin{cases} P = \frac{2EA}{L}(3u_2 - u_3) \\ 0 = \frac{2EA}{L}(-u_2 + u_3) \end{cases} \quad \begin{cases} 100 \cdot 10^3 = \frac{2 \times 200 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^2}{1000}(3u_2 - u_3) \\ -u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \quad u_2 = u_3 = 0.25 \text{ mm}$$

$J=0,25 \text{ mm}$

b) Le jeu "j" pour qu'un effort de compression de 10kN s'exerce dans l'élément 2.

Appliquons les conditions limites :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ +P \\ -\frac{P}{10} \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

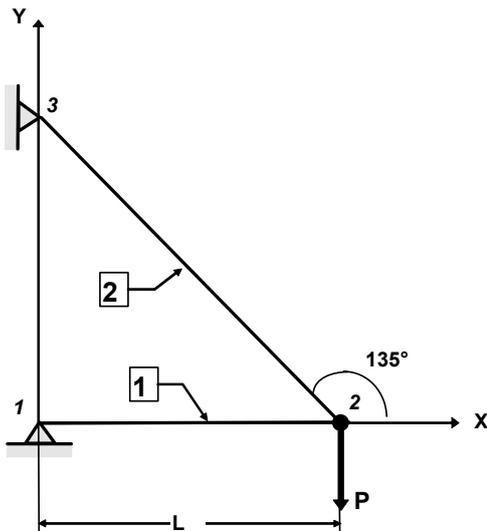
La résolution des équations 2 et 3 du système nous permet de trouver u_2 et u_3 .

$$\begin{cases} P = \frac{2EA}{L}(3u_2 - u_3) \\ -\frac{P}{10} = \frac{2EA}{L}(-u_2 + u_3) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{PL}{2EA} = 3u_2 - u_3 \\ -\frac{PL}{20EA} = -u_2 + u_3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{9PL}{40EA} \\ u_3 = \frac{7PL}{40EA} = 0,175 \text{ mm} \end{cases}$$

$J=0,175 \text{ mm}$

PROBLÈME N°19

Ce problème est le même que le problème 9 qui a été résolu par la méthode de MAXWELL-MOHR.



Les barres (1) et (2) de même section droite A et de même matériau) sont articulées en 1, 2 et 3. Une force verticale P est appliquée en 2.

1°) Déterminez les matrices de rigidité élémentaire des deux éléments en fonction de E , A et L et dans le repère global X, Y . Écrire ces matrices sous la forme :

$$[k^1] = \frac{EA}{L} [\quad] \quad [k^2] = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{L} [\quad]$$

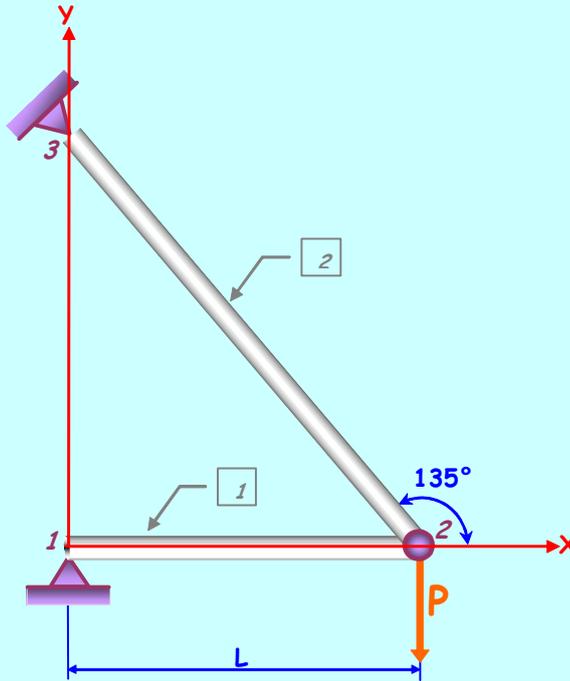
2°) Déterminez sous forme littérale la matrice de rigidité de la structure dans le repère global X, Y . Écrire cette matrice sous la forme :

$$[K] = \frac{EA}{L} [\quad]$$

3°) Calculez (en mm) le déplacement horizontal et le déplacement vertical du nœud 2 pour $A = 1 \text{ cm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $L = 2 \text{ m}$, $P = 10 \text{ kN}$ et la valeur (en kN) des réactions sur les nœuds 1 et 3.

4°) Calculez les efforts axiaux dans les éléments 1 et 2.

RÉPONSES N°19



1°) Matrices de rigidité élémentaire des deux éléments en fonction de E, A et L et dans le repère global X, Y.

Le problème est à 2 degrés de liberté, u_x suivant X et v_y suivant Y (X,Y étant le repère global)

Elément 1 :

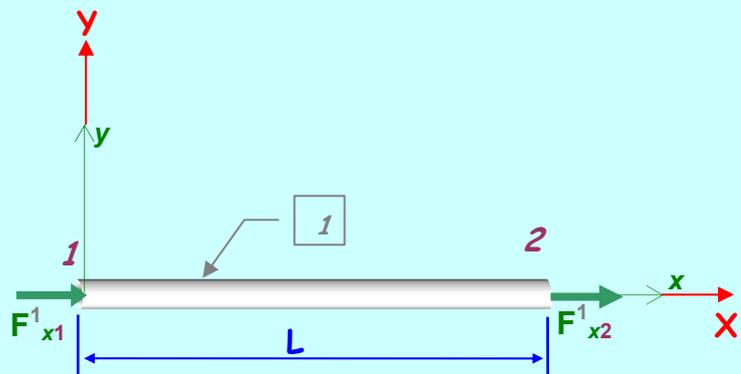
Dans les axes locaux xy

$$[k^1]_{xy} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}$$

Dans les axes globaux XY

$$[k^1]_{XY} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Elément 2 :

Dans les axes locaux xy

$$[k^2]_{xy} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix}$$

Dans les axes globaux XY

Nous devons calculer $[\lambda]$ la matrice de transformation, car pour l'élément 2, les axes locaux et globaux ne coïncident pas :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos 135^\circ & \sin 135^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 135^\circ & \sin 135^\circ \end{bmatrix}$$

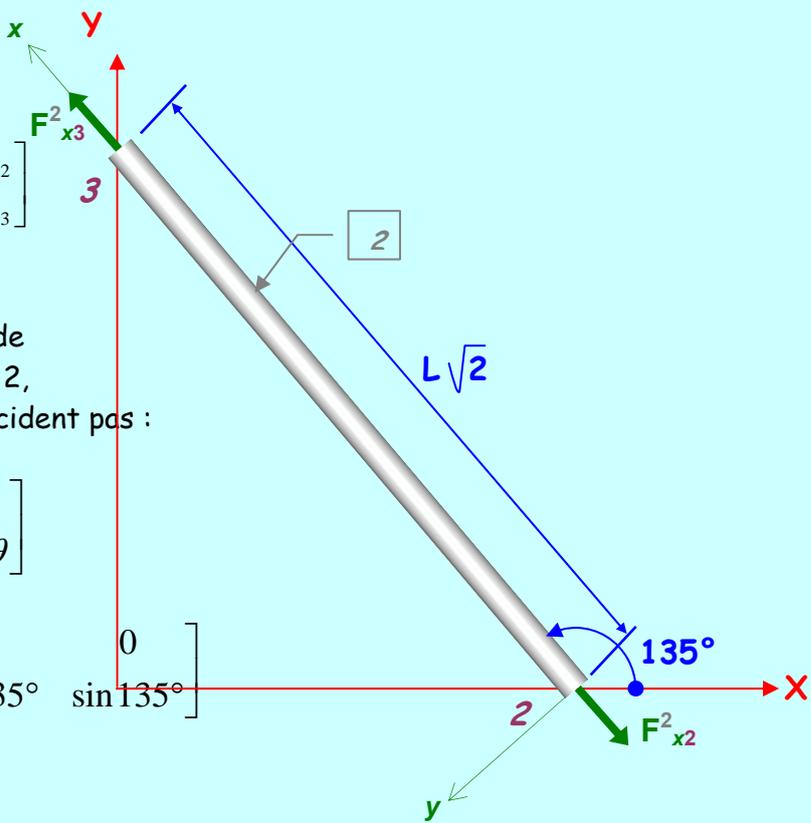
$$[\lambda] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2]_{x,y} = {}^t[\lambda][k^2]_{x,y}[\lambda] \quad [k^2]_{x,y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2]_{x,y} = \frac{EA\sqrt{2}}{4L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2]_{x,y} = \frac{EA\sqrt{2}}{4L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k^2]_{x,y} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k^2]_{x,y} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$



2°) Matrice de rigidité de la structure dans le repère global X, Y.

Procédons à l'assemblage des 2 matrices de rigidité élémentaires :

$$[k^1]_{XY} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k^2]_{X,Y} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{XY} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (1 + \frac{\sqrt{2}}{4}) & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

3°) Déplacement horizontal et déplacement vertical du noeud 2 :

$$[P] = [K][D] \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{/XY} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (1 + \frac{\sqrt{2}}{4}) & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{X1} \\ v_{Y1} \\ u_{X2} \\ v_{Y2} \\ u_{X3} \\ v_{Y3} \end{bmatrix}_{/XY}$$

Appliquons les conditions limites :

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ -10^4 \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{/XY} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (1 + \frac{\sqrt{2}}{4}) & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{X2} \\ v_{Y2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{/XY}$$

La résolution des équations 3 et 4 du système nous permet de trouver u_{x2} et v_{y2} .

$$\begin{cases} 0 = \frac{EA}{L} \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)u_{x2} - \frac{\sqrt{2}}{4}v_{y2} \right) \\ -10^4 = \frac{EA}{L} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}u_{x2} + \frac{\sqrt{2}}{4}v_{y2} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)u_{x2} - \frac{\sqrt{2}}{4}v_{y2} \right) \\ -10^4 = \frac{200 \cdot 10^3 \times 100 \times \sqrt{2}}{2 \cdot 10^3 \times 4} (-u_{x2} + v_{y2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)u_{x2} - \frac{\sqrt{2}}{4}v_{y2} \\ \frac{-10^4 \times 2 \cdot 10^3 \times 4}{200 \cdot 10^3 \times 100 \times \sqrt{2}} = -u_{x2} + v_{y2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{x2} = -1 \text{ mm} \\ v_{y2} = -3,828 \text{ mm} \end{cases}$$

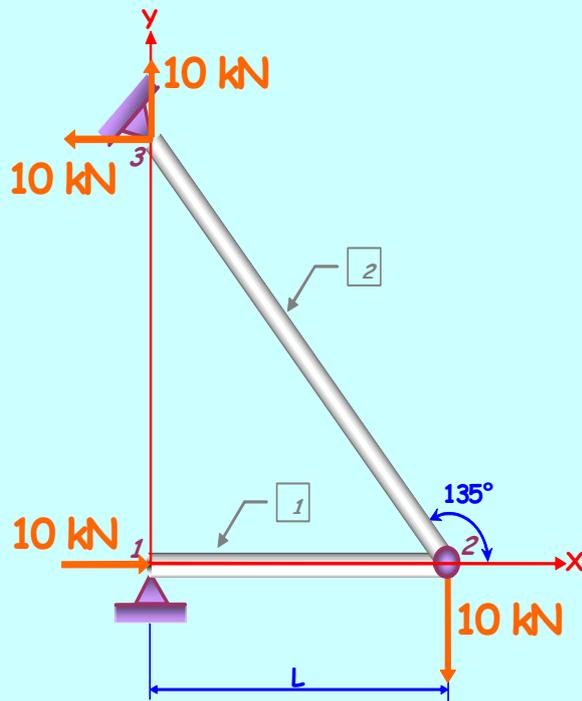
$$\begin{aligned} \delta_{H2} &= -1 \text{ mm} \\ \delta_{V2} &= -3,83 \text{ mm} \end{aligned}$$

Réactions sur les nœuds 1 et 3 :

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ -10^4 \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{/XY} = 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3,83 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{/XY}$$

La résolution des équations 1, 2, 5 et 6 du système nous permet de trouver les réactions.

$$\begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ 0 \\ -10^4 \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \end{bmatrix}_{/XY} = 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3,83 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{/XY} \quad \begin{cases} F_{X1} = 10^4 \\ F_{Y1} = 0 \\ F_{X3} = 10^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 3,83 \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \\ F_{Y3} = 10^4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + 3,83 \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \end{cases}$$



$$F_{x1} = 10 \text{ kN}$$

$$F_{y1} = 0 \text{ kN}$$

$$F_{x3} = -10 \text{ kN}$$

$$F_{y3} = 10 \text{ kN}$$

4°) Efforts axiaux dans les éléments 1 et 2 :

Elément 1 :

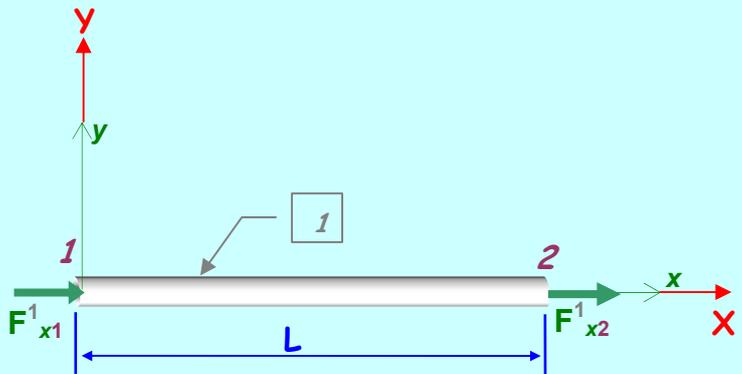
Dans les axes locaux xy

$$[k^1]_{xy} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}$$

Les axes locaux et globaux coïncident :

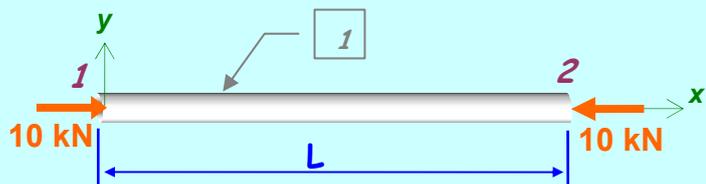
$$u_{x1} = u_{x1} \quad \text{et} \quad u_{x2} = u_{x2}$$



$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{x2}^1 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ -10^4 \end{bmatrix}$$

L'effort normal dans l'élément 1 est un effort axial de compression :

$$N_x^1 = -10 \text{ kN}$$



Elément 2 :

Dans les axes locaux xy

$$[k^2]_{xy} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix}$$

Les axes locaux et globaux ne coïncident pas
il nous faut calculer :

u_{x2} et u_{x3}

Utilisons la relation : $[D^e]_{x,y} = [\lambda][D^e]_{x',y'}$

Avec $[\lambda]$ trouvée précédemment :

$$[\lambda] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

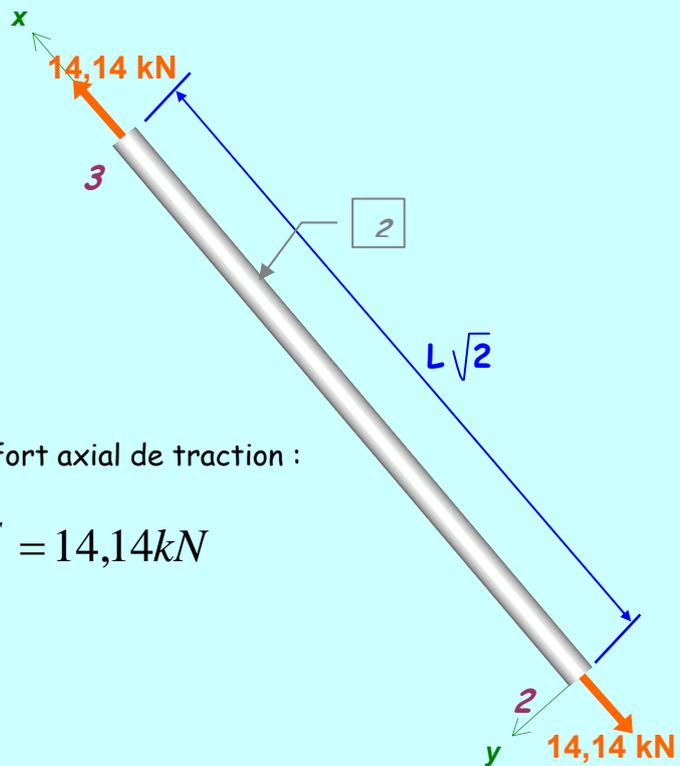
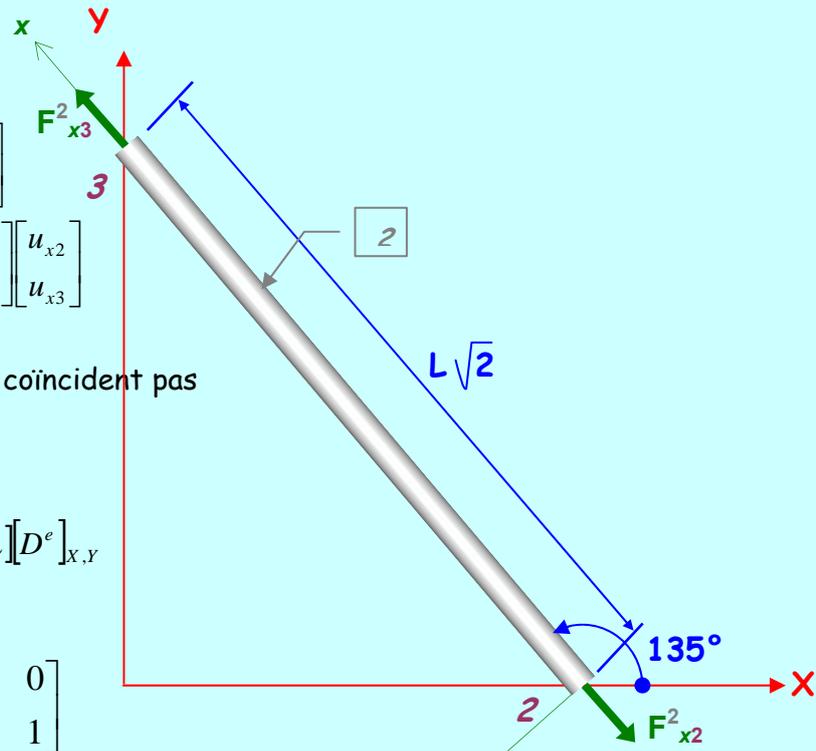
$$\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{X2} \\ v_{Y2} \\ u_{X3} \\ v_{Y3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3,828 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2,828 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où :
$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix}_{/xy} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} = \frac{10^4}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -2,828 \\ 0 \end{bmatrix} = 5.10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,828 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^2 \\ F_{x3}^2 \end{bmatrix}_{/xy} = \begin{bmatrix} -14140 \\ +14140 \end{bmatrix}$$

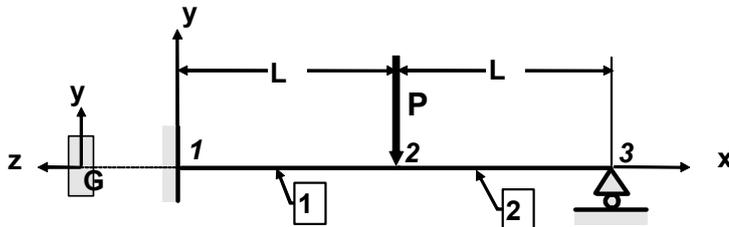
L'effort normal dans l'élément 1 est un effort axial de traction :

$$N_x^{BC} = 14,14kN$$



PROBLÈME N°20

Ce problème est le même que le problème 12 qui a été résolu par la méthode de MAXWELL-MOHR.



$P=12\text{kN}$, $L=1\text{m}$, $E=200\text{GPa}$, la section est un rectangle de $80\text{mm}\times 37.5\text{mm}$.

1°) Déterminez sous forme numérique (en N/m) la matrice de rigidité de la poutre ci-contre (discrétiser en deux éléments de longueur L et trois nœuds).

2°) En déduire les valeurs numériques de v_2 (en mm), de θ_{z2} , θ_{z3} (en rd) et des réactions sur les nœuds 1 et 3 (en kN pour les forces, Nm pour les moments). Tracez le diagramme des moments fléchissants sur les éléments 1 et 2.

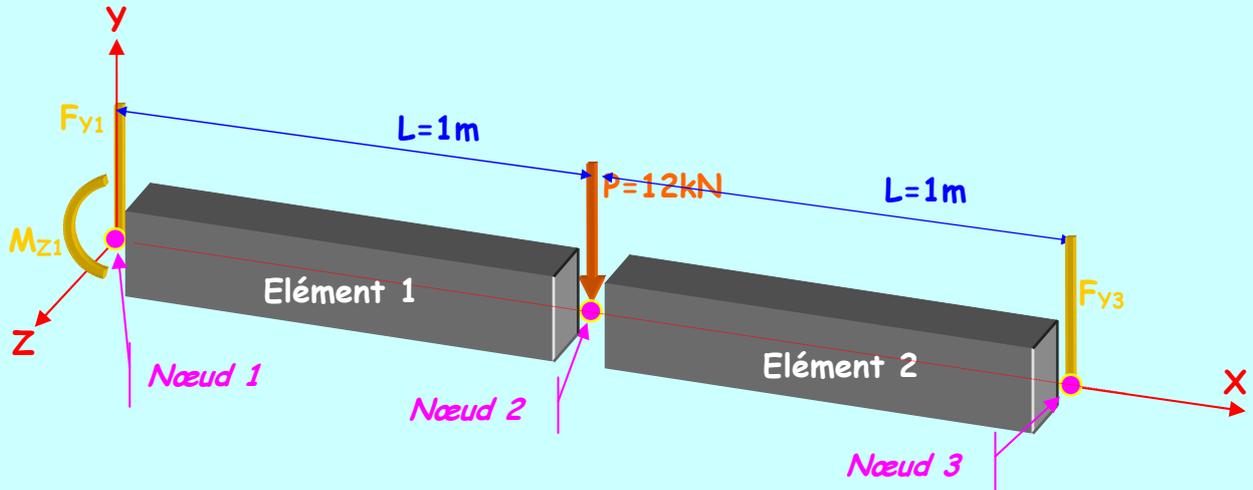
3°) Calculez la flèche (en mm), la déformation axiale maximum et la contrainte de flexion maximum (en MPa) au milieu de l'élément 2

RÉPONSES N°20

Le problème est hyperstatique externe de degré 1.

1°)

Discretisons la poutre en 2 éléments et 3 nœuds :



Dans notre cas les axes locaux et globaux coïncident.

Chaque élément, compte tenu du chargement, n'est soumis qu'à un cisaillement de flexion.

Chaque nœud admet un déplacement v suivant Y , et une rotation θ suivant Z .

La matrice de rigidité élémentaire en flexion dans le plan XY :

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

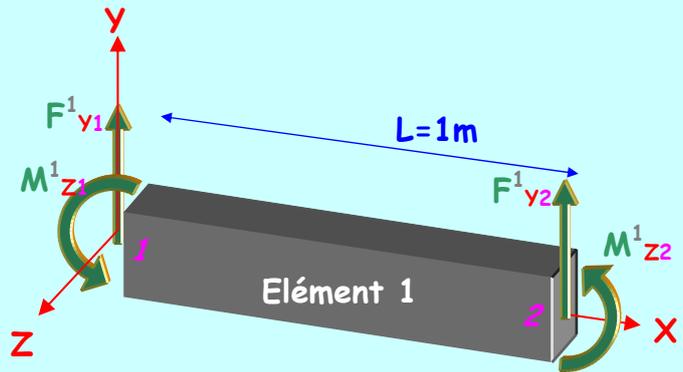
Elle relie les efforts d'extrémité de l'élément et les déplacements des nœuds

$$\begin{bmatrix} F_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Calculons les matrices de rigidité élémentaires.

Elément 1 :

$$[k^1] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

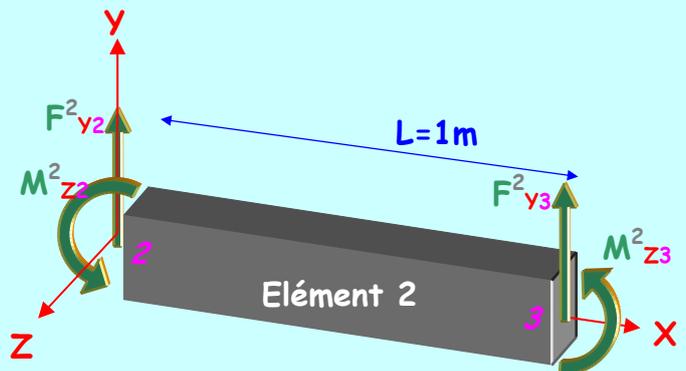


$$[k^1] = \frac{200 \cdot 10^9 \times 37,5 \cdot 10^{-3} \times (80 \cdot 10^{-3})^3}{12} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} ; [k^1] = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F^1_{y1} \\ M^1_{z1} \\ F^1_{y2} \\ M^1_{z2} \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Elément 2 :

$$[k^2] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



$$[k^2] = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F^2_{y2} \\ M^2_{z2} \\ F^2_{y3} \\ M^2_{z3} \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

Détermination de la matrice de rigidité K de la structure :

Procédons à l'assemblage des 2 matrices de rigidité élémentaires :

$$[k^1] = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad [k^2] = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

D'où : $[P] = [K][D]$

$$\begin{bmatrix} F_{Y1} \\ M_{Z1} \\ F_{Y2} \\ M_{Z2} \\ F_{Y3} \\ M_{Z3} \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{Z1} \\ v_2 \\ \theta_{Z2} \\ v_3 \\ \theta_{Z3} \end{bmatrix}$$

2°)

Appliquons les conditions limites :

$$\begin{bmatrix} F_{Y1} \\ M_{Z1} \\ -P \\ 0 \\ F_{Y3} \\ 0 \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_{Z2} \\ 0 \\ \theta_{Z3} \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

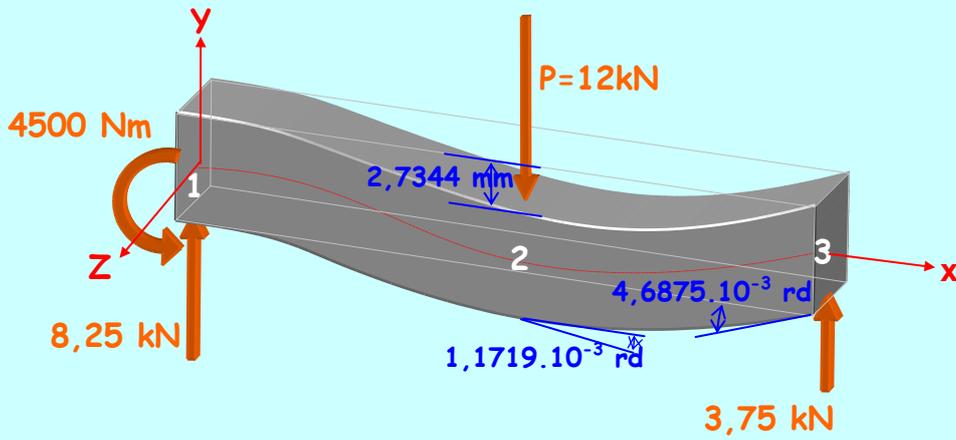
La résolution des équations (3), (4), et (6) permet de trouver les déplacements :

$$v_2 = -2.7344 \text{ mm} \quad \theta_{Z2} = -1.1719 \cdot 10^{-3} \quad \theta_{Z3} = +4.6875 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

$$\begin{bmatrix} F_{Y1} \\ M_{z1} \\ -12000 \\ 0 \\ F_{Y3} \\ 0 \end{bmatrix} = 3.2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,7344 \cdot 10^{-3} \\ -1,1719 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 4,6875 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

La résolution des équations (1), (2), et (5) permet de trouver :

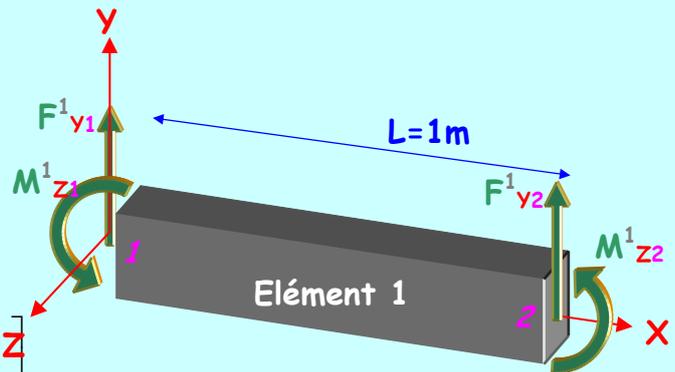
$$F_{y1} = 8.25 \text{ kN} \quad F_{y3} = 3.75 \text{ kN} \quad M_{z1} = 4500 \text{ Nm}$$



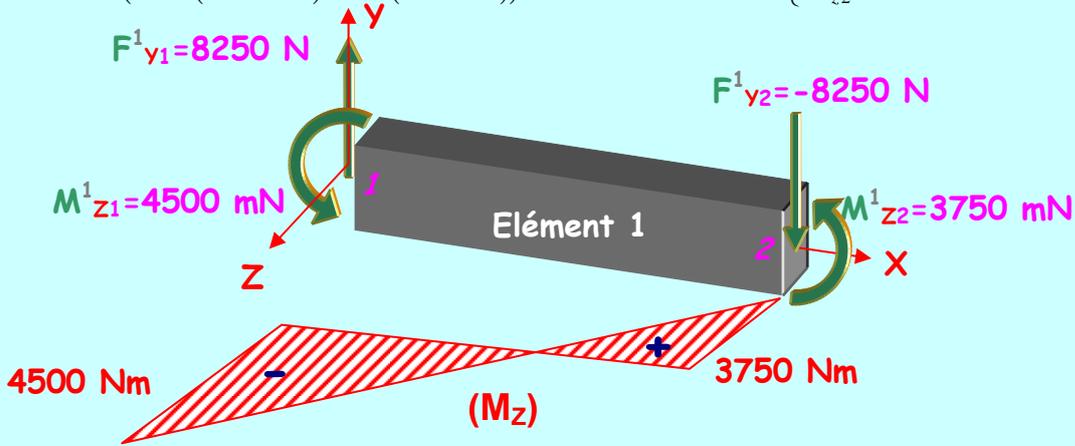
Déterminons les efforts d'extrémités de l'élément 1 :

$$\begin{bmatrix} F_{y1}^1 \\ M_{z1}^1 \\ F_{y2}^1 \\ M_{z2}^1 \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{y1}^1 \\ M_{z1}^1 \\ F_{y2}^1 \\ M_{z2}^1 \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,7344 \cdot 10^{-3} \\ -1,1719 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$



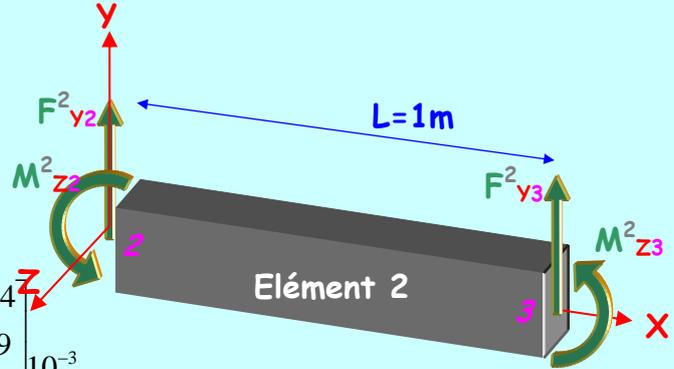
$$\begin{cases} F_{y1}^1 = 3,2 \cdot 10^5 (-12 \times (-2,7344) + 6 \times (-1,1719)) 10^{-3} \\ M_{z1}^1 = 3,2 \cdot 10^5 (-6 \times (-2,7344) + 2 \times (-1,1719)) 10^{-3} \\ F_{y2}^1 = 3,2 \cdot 10^5 (12 \times (-2,7344) - 6 \times (-1,1719)) 10^{-3} \\ M_{z2}^1 = 3,2 \cdot 10^5 (-6 \times (-2,7344) + 4 \times (-1,1719)) 10^{-3} \end{cases} \quad \begin{cases} F_{y1}^1 = 8250 N \\ M_{z1}^1 = 4500 mN \\ F_{y2}^1 = -8250 N \\ M_{z2}^1 = 3750 mN \end{cases}$$



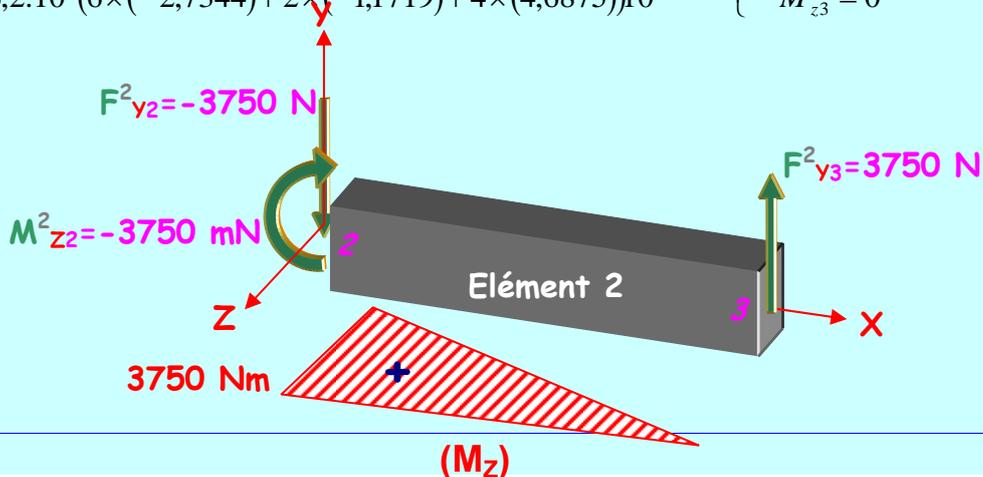
Déterminons les efforts d'extrémités de l'élément 2 :

$$\begin{bmatrix} F_{y2}^2 \\ M_{z2}^2 \\ F_{y3}^2 \\ M_{z3}^2 \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{y2}^2 \\ M_{z2}^2 \\ F_{y3}^2 \\ M_{z3}^2 \end{bmatrix} = 3,2 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,7344 \\ -1,1719 \\ 0 \\ 4,6875 \end{bmatrix} 10^{-3}$$



$$\begin{cases} F_{y2}^2 = 3,2 \cdot 10^5 (12 \times (-2,7344) + 6 \times (-1,1719) + 6 \times (4,6875)) 10^{-3} \\ M_{z2}^2 = 3,2 \cdot 10^5 (6 \times (-2,7344) + 4 \times (-1,1719) + 2 \times (4,6875)) 10^{-3} \\ F_{y3}^2 = 3,2 \cdot 10^5 (-12 \times (-2,7344) - 6 \times (-1,1719) - 6 \times (4,6875)) 10^{-3} \\ M_{z3}^2 = 3,2 \cdot 10^5 (6 \times (-2,7344) + 2 \times (-1,1719) + 4 \times (4,6875)) 10^{-3} \end{cases} \quad \begin{cases} F_{y2}^2 = -3750 N \\ M_{z2}^2 = -3750 mN \\ F_{y3}^2 = 3750 N \\ M_{z3}^2 = 0 \end{cases}$$



3°)

Flèche :

La matrice d'interpolation des déplacements vaut :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad v(x) = [A][D^e]$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

Pour $x = \frac{L}{2}$ et $L = 1\text{m}$ $[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7344 \\ -1.1719 \\ 0 \\ +4.6875 \end{bmatrix} 10^{-3} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{m} = 2.1 \text{mm}$$

Déformation:

La matrice d'interpolation des déformations vaut :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\varepsilon_{xx} = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

Pour : $x = \frac{L}{2}$ $L = 1\text{m}$ $y = \pm 40\text{mm}$

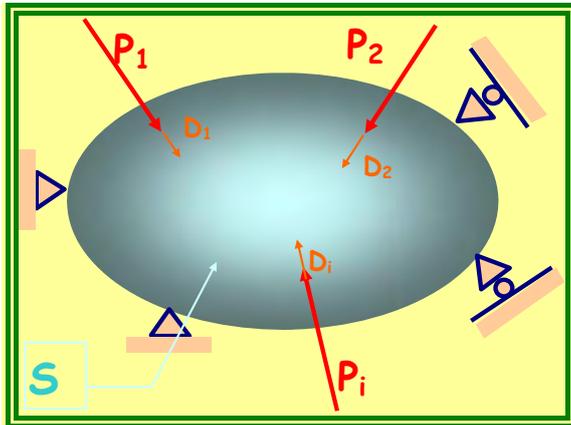
$$\varepsilon_{xx} = \pm 0.04 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7344 \\ -1.1719 \\ 0 \\ +4.6875 \end{bmatrix} 10^{-3} \quad \varepsilon_{xx} = \pm 2,3466 \cdot 10^{-4}$$

Contrainte :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = \pm 46.9 \text{MPa}$$

3. MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS OU DE LA RIGIDITÉ DE LA STRUCTURE :

FLEXIBILITÉ ET RIGIDITÉ D'UNE STRUCTURE :



La relation de flexibilité s'écrit :

$$[D] = [f][P]$$

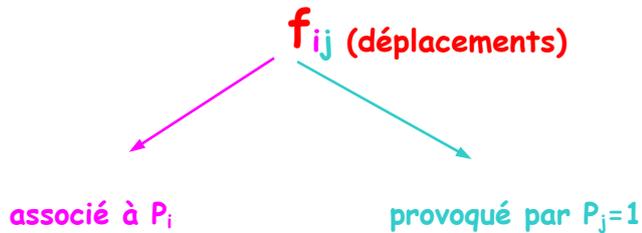
La matrice symétrique [f] est la matrice de flexibilité de la structure.

$$[P] = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_i]$$

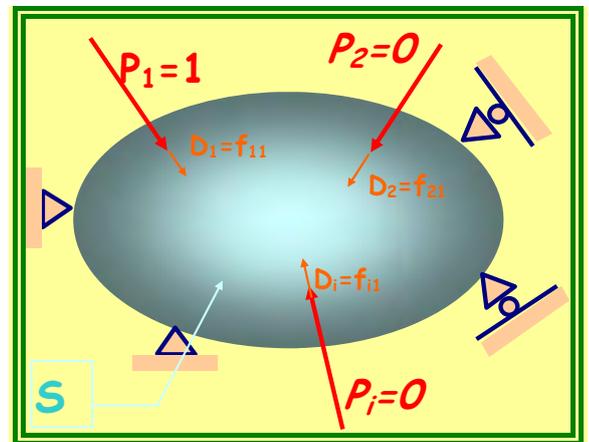
$$[D] = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_i]$$

Les termes \$f_{ij}\$ de la matrice de flexibilité se calculent par la méthode de la "charge unité".

On rappelle la signification physique d'un terme \$f_{ij}\$ de la matrice de flexibilité [f] :



$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1i} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 = 1 \\ P_2 = 0 \\ \dots \\ P_i = 0 \end{bmatrix}$$



L'énergie de déformation élastique ($W_{déf}=W_{ext}$) se calcule en fonction de la matrice de flexibilité par :

$$W_{déf} = \frac{1}{2} [P][f][P]$$

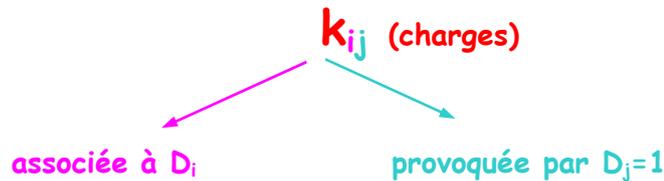
En inversant la relation de flexibilité on obtient : $[P] = [f]^{-1}[D]$

Posons: $[f]^{-1} = [k]$

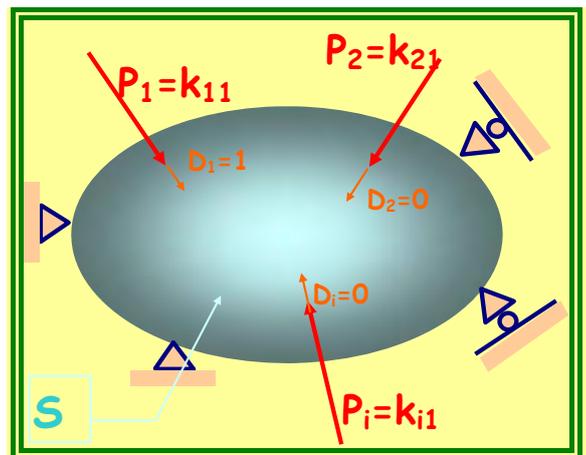
La matrice symétrique $[k]$ est la matrice de rigidité de la structure.

$$[P] = [k][D]$$

Les termes k_{ij} de la matrice de rigidité peuvent se calculer par la méthode du "déplacement unité".



$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} \\ k_{21} & k_{22} & & k_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 = 1 \\ D_2 = 0 \\ \dots \\ D_i = 0 \end{bmatrix}$$



L'énergie de déformation vaut alors, en fonction de la matrice de rigidité $[K]$ en remplaçant $[P]$ par $[K][D]$ dans $W_{déf} = \frac{1}{2} [P][f][P]$:

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \frac{1}{2} [D][k][f][k][D]$$

Soit, puisque

$$[k][f] = [I]$$

$$W_{\text{d\u00e9f}} = \frac{1}{2} [D][k][D]$$

4. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS :

4.1. Principe de la Méthode :

Pour une structure de géométrie complexe les méthodes de résolution exposées précédemment : méthode de MAXWELL-MOHR (méthode de la charge ou du déplacement unité), méthode de CASTIGLIANO sont difficiles voire impossibles à appliquer. Ces méthodes manuelles de calcul ont été établies au milieu du XIX^e siècle.

Au milieu du XX^e siècle l'apparition des premiers ordinateurs a permis le développement d'une nouvelle méthode numérique de calcul sous l'impulsion de COURANT, ARGYRIS, TURNER et de bien d'autres : la "**Méthode des Éléments Finis**" (MEF).

La méthode des éléments finis est une **méthode numérique inverse** « type déplacements » (donc apparenté à la méthode de rigidité) de résolution des problèmes d'élasticité. Dans une méthode du « type déplacement » on contourne la difficulté, voir l'impossibilité de la résolution directe d'un problème d'élasticité de la façon suivante :

1°) On se fixe la forme des 3 déplacements u, v, w d'un point P appartenant à un milieu continu en fonction de ses coordonnées x, y et z .

2°) On calcule les inconnues restantes :

$[\varepsilon]$ par dérivation de $[u]$.

$[\sigma]$ par les lois de LAMÉ à partir de $[\varepsilon]$.

3°) On vérifie, à posteriori, les équations restantes : les équations d'équilibre local.

4°) On vérifie enfin, à posteriori, les conditions aux limites en contraintes et déplacements.

La résolution d'un problème d'élasticité de cette façon est donc toujours possible mais généralement les équations d'équilibre local ne sont pas satisfaites de partout et les conditions aux limites non plus. **La solution du problème n'est donc qu'approchée** (avec une bonne approximation quand même !).

Cette méthode numérique s'effectue en quatre étapes principales :

▶ 1^{ère} étape :

Le maillage de la structure (découpage en éléments).

▶ 2^{ème} étape :

Le calcul de la matrice de rigidité $[k^e]$ d'un l'élément libre "e".

▶ 3^{ème} étape :

Le calcul de la matrice de rigidité $[K]$ globale de la structure par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

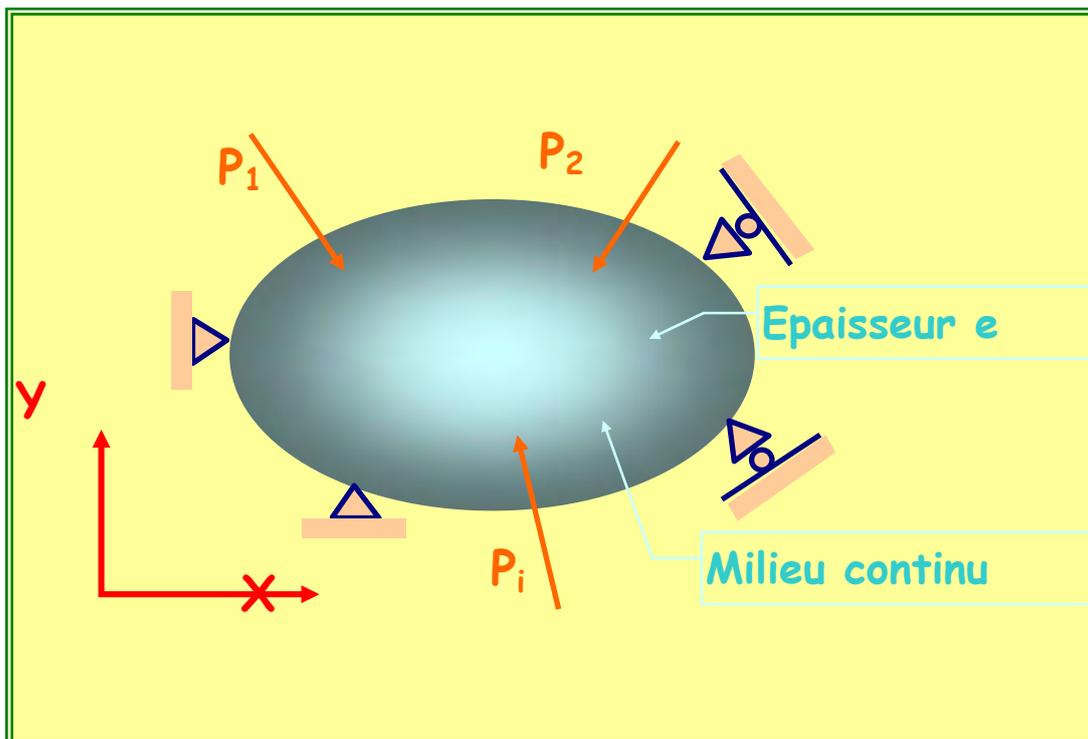
▶ 4^{ème} étape :

La résolution du problème qui consiste principalement à inverser la matrice de rigidité réduite $[K_r]$ de la structure.

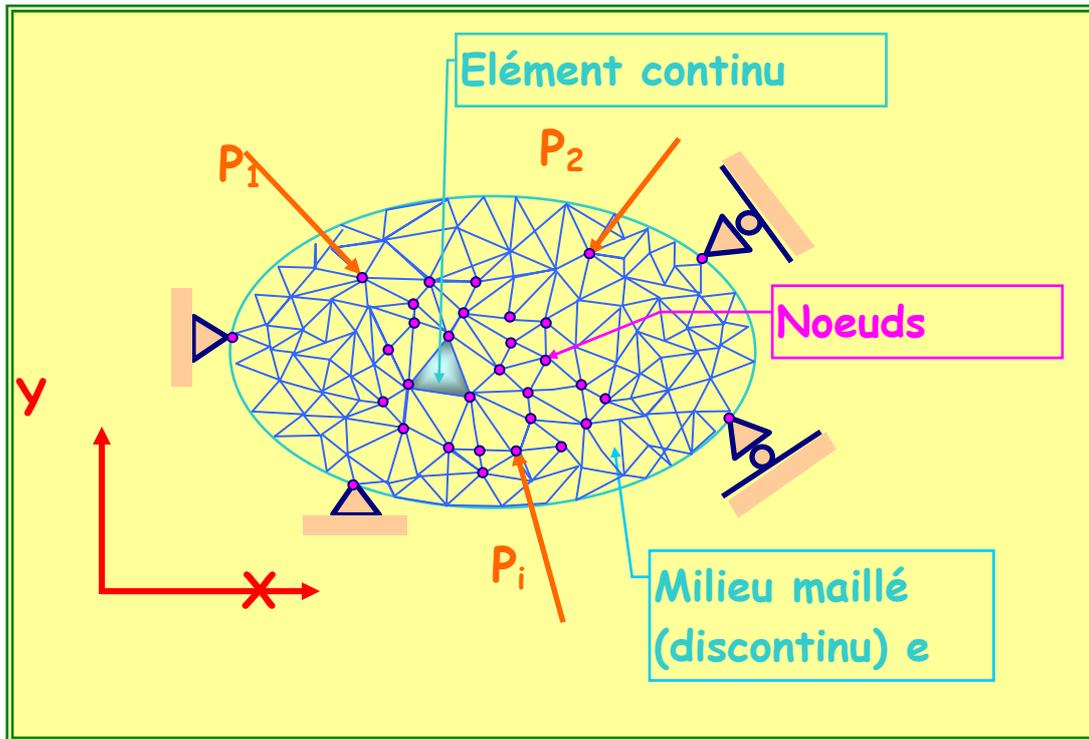
Considérons la structure plane de la figure ci-dessous.

1^{ère} étape :

Maillage de la structure :



Le milieu continu "S" est découpé en un certain nombre de morceaux "e" de forme géométrique simple (des triangles par exemple si la structure est plane) de telle manière que la réunion de tous les morceaux recouvre le plus exactement possible la structure. Cette opération s'appelle le **maillage de la structure**. Chaque morceau "e" est un **élément**. L'élément est considéré comme un milieu continu. Les dimensions des éléments sont finies et non infinitésimales au sens du calcul différentiel. D'où le nom de la méthode : Méthode des "Éléments Finis" (MEF).



Les éléments sont connectés entre eux par des **noeuds** (les sommets des triangles par exemple). Les nœuds qui sont des **points matériels** possèdent 6 degrés de liberté dans l'espace (les trois translations et les trois rotations) :

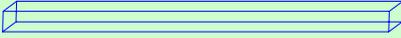
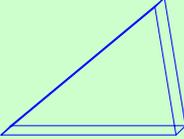
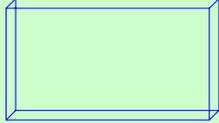
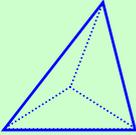
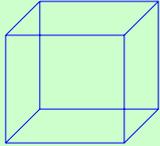
$${}^t[D] = [u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z]$$

Attention, un point P_0 pris dans l'élément (qui est considéré comme un milieu continu) possède trois déplacements :

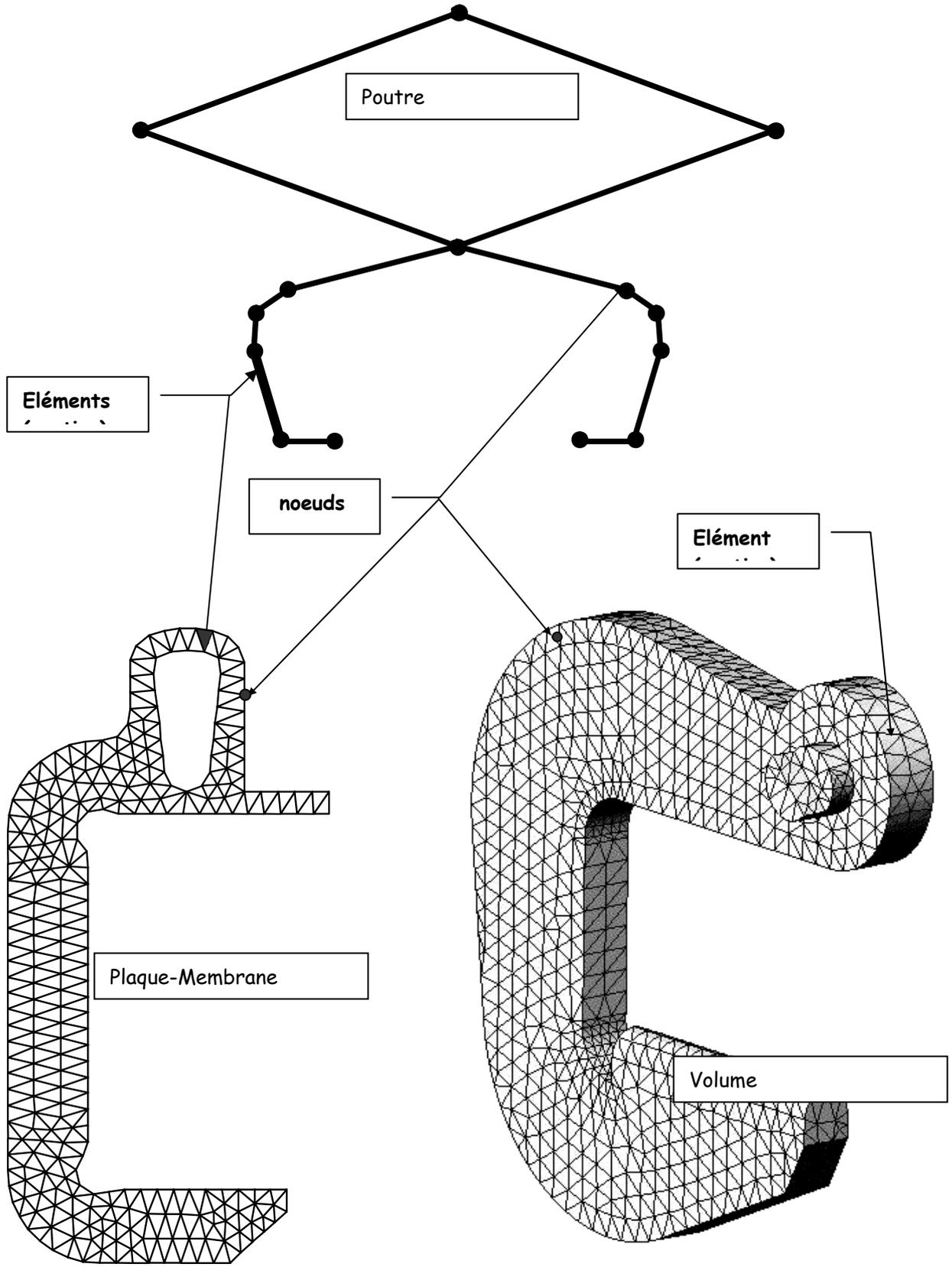
$${}^t[u] = [u \ v \ w]$$

Les déplacements de tous les nœuds de la structure sont les inconnues du problème.

La forme de l'élément est fonction de la dimension du milieu continu à mailler.

Dimension du Milieu	Milieu	Éléments
1	Poutres	 <p><i>Poutre droite</i></p>
2	Plaques ou membranes	  <p><i>Triangle</i> <i>quadrangle</i></p>
3	Volumes	  <p><i>tétraèdre</i> <i>hexaèdre</i></p>

Exemples de maillage :



Le déplacement $\bar{u}(P_0)$ d'un point de l'élément et les variables en ce point P_0 de l'élément sont fonctions du type de problème (la dimension du milieu continu).

Dimension du milieu	Milieu	Nombre de composantes pour $\bar{u}(P_0)$	variables	
			locales	globales
1	Poutres	u, v, w	x_e	X
2	Membranes	u, v	x_e, y_e	X, Y
	Plaques	w		
3	Volumes	u, v, w	x_e, y_e, z_e	X, Y, Z

$x_e y_e z_e$ est le repère local de l'élément.
 XYZ est le repère global de la structure.

2^{ème} étape :

Calcul de la matrice de rigidité d'un l'élément libre "e":

On calcule alors de la matrice de rigidité $[k^e]$ d'un élément libre "e" (un élément libre est un élément isolé de son contexte et qui n'appartient pas par conséquent à une structure en équilibre). Cette **matrice de rigidité élémentaire** est généralement calculée dans le repère local $x_e y_e z_e$ de l'élément. On montrera par la suite que $[k^e]$ se calcule par une intégrale sur le volume de l'élément :

$$[k^e] = \int_{V_e} [B][C][B]dV$$

$[C]$ est la matrice des constantes élastiques du matériau et $[B]$ la matrice d'interpolation des déformations dans l'élément

3^{ème} étape :**Calcul de la matrice de rigidité de la structure :**

Les différentes matrices de rigidité élémentaire sont alors assemblées afin d'obtenir la matrice de rigidité $[K]$ de la structure. Cette opération s'appelle **l'assemblage**. Elle s'effectue en écrivant que l'énergie de déformation élastique de la structure discrétisée vaut :

$$W_{\text{déf}} = \sum_{\text{éléments}} W_{\text{déf}}^e$$

Relation dans laquelle $W_{\text{déf}}^e$ est l'énergie de déformation élastique pour un élément, qui se calcule par :

$$W_{\text{déf}}^e = \frac{1}{2} [D^e]^t [k^e] [D^e]$$

$[D^e]$ est un vecteur contenant les déplacements des nœuds de l'élément.

$$\frac{1}{2} [D]^t [K] [D] = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} [D^e]^t [k^e] [D^e]$$

L'identification membre à membre de cette expression permet la "construction" (on dit l'assemblage) de la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure. On obtient finalement un système matriciel de la forme :

$$[P] = [K][D]$$

La matrice symétrique $[K]$ est la matrice de rigidité de la structure.

Elle relie les forces nodales $[P]$ appliquées sur les nœuds de la structure (y compris les réactions isostatiques et hyperstatiques) et **les déplacements nodaux $[D]$ qui sont les inconnues du problème**. Notez qu'un certain nombre de déplacements nodaux sont nuls (aux appuis) et qu'ils ne font pas partie par conséquent des inconnues du problème.

Cette transformation du **milieu continu** en un **milieu discret** de points matériels (les nœuds) remplace l'étude d'un milieu continu, comportant un nombre infini d'inconnues, en l'étude d'un milieu discret ne comportant plus qu'un nombre fini d'inconnues. En effet, le milieu discret possédant un nombre fini de nœuds, il y a donc un nombre fini d'inconnues : les déplacements $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ de tous les nœuds. Leur nombre donne l'ordre de la matrice de rigidité $[K]$ de la structure.

4^{ème} étape :
Résolution du problème.

La résolution consiste à inverser la **matrice de rigidité réduite** $[K_r]$. La matrice de rigidité réduite est obtenue à partir de la matrice de rigidité $[K]$ de la structure en enlevant les lignes et les colonnes qui correspondes aux appuis. Après inversion, le système numérique se présente alors sous la forme :

$$[D] = [K_r]^{-1}[P]$$

Cette relation donne les déplacement nodaux non nuls $[D]$, que l'on réinjecte dans le système général $[P]=[K][D]$ pour calculer toutes les réactions (isostatiques et hyperstatiques). On déduit ensuite les déplacements, les déformations et les contraintes dans l'élément.

4.2. Interpolation polynomiale :

Pour calculer, par la suite, la matrice de rigidité d'un élément libre, il faut au préalable chercher l'expression du déplacement $\bar{u}(P_0)$ d'un point P_0 de l'élément en fonction des déplacements des noeuds de l'élément. Ce problème, d'une importance capitale, consiste à "interpoler" le déplacement $\bar{u}(P_0)$ d'un point P_0 de l'élément en fonction des déplacements des noeuds de l'élément. La fonction d'interpolation, sous forme d'un polynôme, peut être choisie en concordance avec la théorie (pour les poutres par exemple) ou de façon "plus ou moins approchée" pour les autres structures. Le nombre de variables et le degré du polynôme d'interpolation sont conditionnés par :

- La dimension du milieu pour le nombre de variables.
- Le nombre de noeuds de l'élément et le nombre de degré de liberté par noeud.

4.2.1. Le nombre de variables du polynôme d'interpolation dépend de la dimension du milieu :

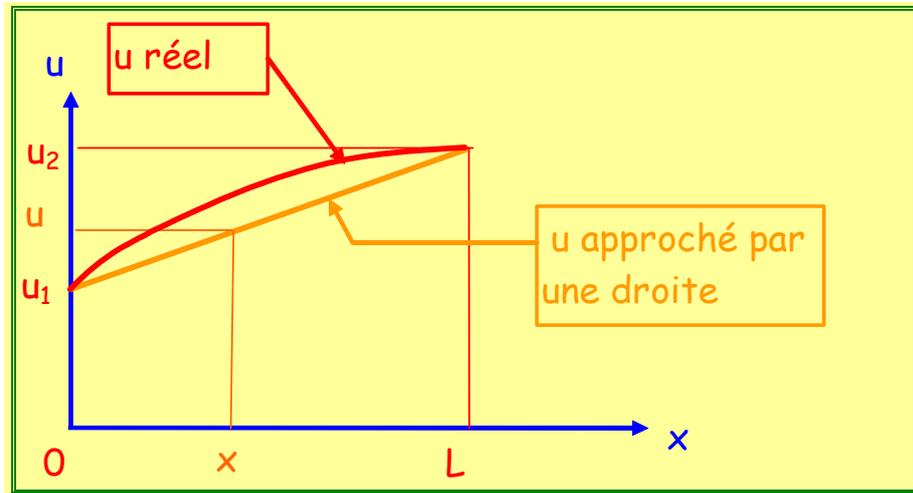
1°) Milieu de dimension 1 (poutres) :

Le polynôme est fonction d'une variable x :

	Nbre de termes*	d° du polynôme	Interpolation
1	1	0	
x	2	1	linéaire
x^2	3	2	quadratique
x^3	4	3	cubique
x^4	5	4	quartique
.....etc.....			

Exemple : interpolation linéaire

L'interpolation **linéaire** consiste à approximer une courbe donnée entre deux points par une droite passant par ces deux points.



L'équation de la droite est de la forme :

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x \qquad u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

L'équation précédente peut aussi s'écrire sous la forme typique utilisée en éléments finis :

$$u = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \qquad N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{ et } N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Le déplacement u s'écrit sous forme matricielle :

$$u = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad u = [A] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

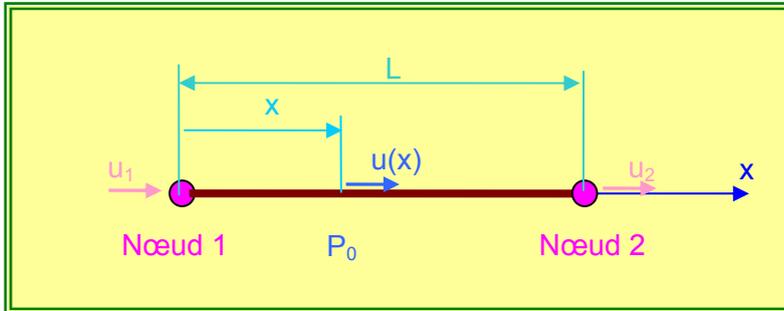
Les fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont appelées fonctions d'interpolation.
La matrice $[A] = [N_1(x) \quad N_2(x)]$ est la matrice d'interpolation des déplacements.

4.2.2. Le degré du polynôme d'interpolation dépend du nombre de nœuds de l'élément et le nombre de degré de liberté par nœud :

Élément poutre droite à 2 nœuds :

Les sollicitations traction, torsion et flexion dans les plans principaux d'inertie xy et xz peuvent se traiter séparément.

- Traction/compression :

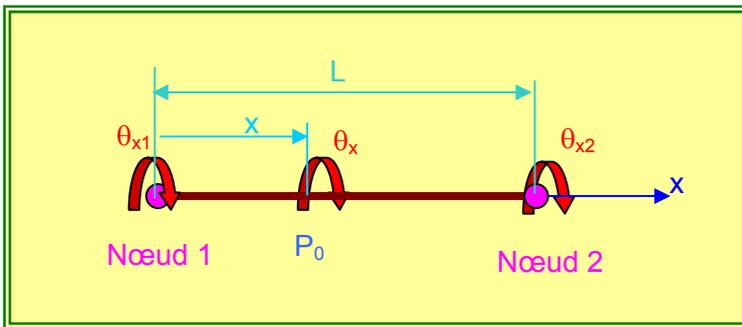


2 déplacements nodaux connus u_1 et $u_2 \Rightarrow 2$ constantes α_i à déterminer pour $u(x)$.

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

L'interpolation est linéaire comme dans la théorie des poutres.

- Torsion :

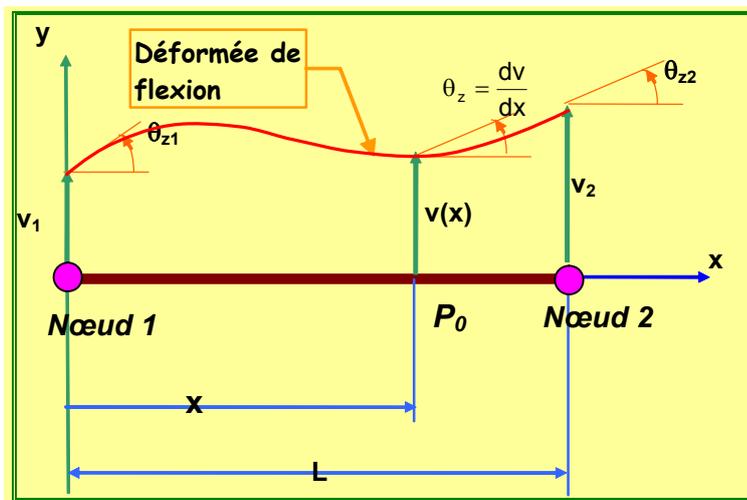


2 déplacements nodaux connus θ_{x1} et $\theta_{x2} \Rightarrow 2$ constantes α_i à déterminer pour interpoler θ_x .

$$\theta_x(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

L'interpolation est linéaire comme dans la théorie des poutres.

- Flexion plane dans le plan xy :

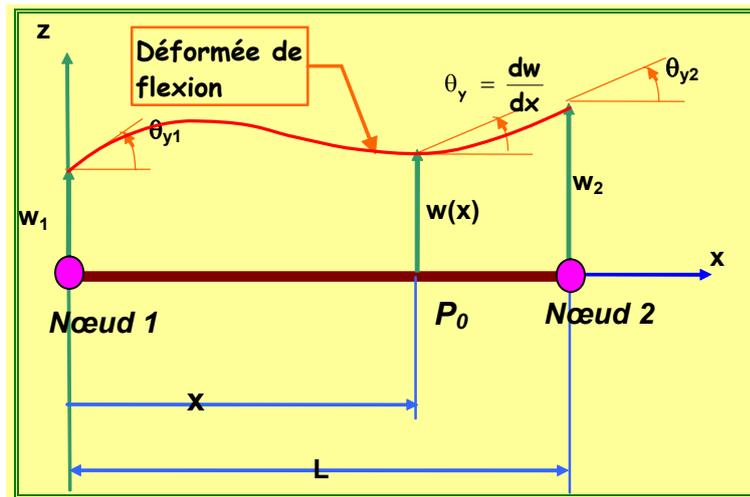


4 déplacements nodaux connus $v_1, \theta_{z1}, v_2, \theta_{z2} \Rightarrow 4$ constantes α_i à déterminer pour interpoler $v(x)$.

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

L'interpolation est du 3^{ème} degré comme dans la théorie des poutres.

- Flexion plane dans le plan xz :

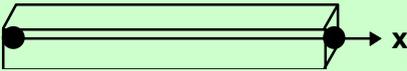
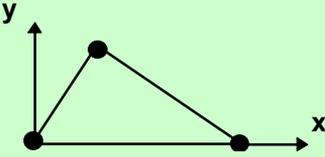
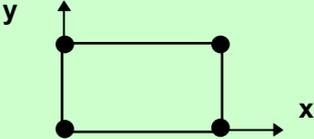
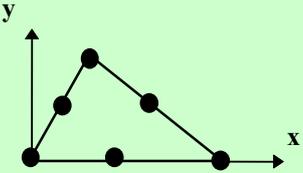
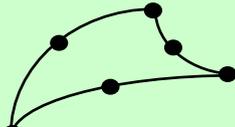
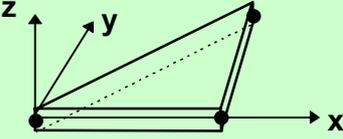
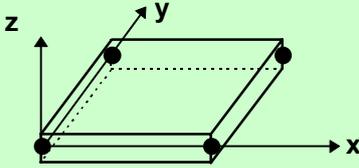


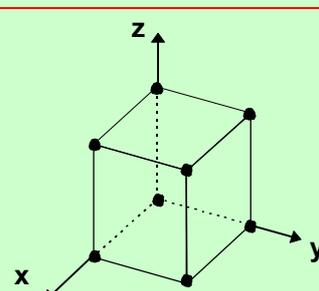
4 déplacements nodaux connus $w_1, \theta_{y1}, w_2, \theta_{y2} \Rightarrow 4$ constantes à déterminer pour interpoler $w(x)$.

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

L'interpolation est du 3^{ème} degré comme dans la théorie des poutres.

4.3. Éléments usuels :

Dimension du Milieu	Milieu	Éléments	ddl/nœud	d° du polynôme d'interpolation des déplacements
1	Poutres	 <p><i>poutre droite à 2 nœuds</i></p>	6 u,v,w $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	3
		 <p><i>Triangle à 3 nœuds</i></p>		1
	Membranes	 <p><i>Quadrilatère à 4 nœuds</i></p>	2 u,v	2
2	(Chargement dans x,y)	 <p><i>Triangle à 6 nœuds</i></p> 		2
	Plaques	 <p><i>Triangle à 3 nœuds</i></p>	3 w, θ_x, θ_y	3
	(Chargement suivant z)	 <p><i>Quadrilatère à 4 nœuds</i></p>		4

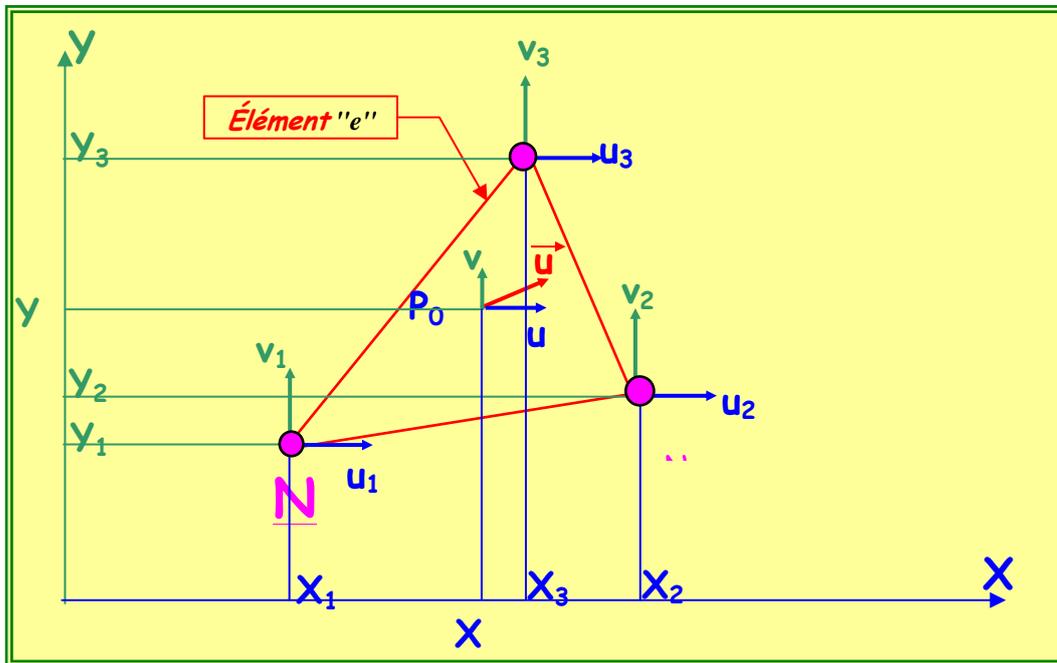
Dimension du Milieu	Milieu	Éléments	ddl/nœud	d° du polynôme d'interpolation des déplacements
3	Volumes	 <p>hexaèdre à 8 nœuds</p>	3 u,v,w	3

4.4. Calcul de la matrice de rigidité $[k^e]$ d'un élément libre :

On rappelle qu'un élément "libre" est un élément isolé de son contexte (qui n'appartient pas à une structure en équilibre).

4.4.1. Matrice d'interpolation des déplacements $[A]$:

Considérons un élément de membrane triangulaire à 3 nœuds.



Il y a 2 déplacements u et v à interpoler et 6 déplacements nodaux connus. Les polynômes d'interpolation ne peuvent comporter que 3 constantes α_i . Ils seront donc de la forme :

$$u(X,Y) = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y$$

$$v(X,Y) = \alpha_4 + \alpha_5 X + \alpha_6 Y$$

L'interpolation est **linéaire**. Les relations précédentes

s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X & Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_1$$

$$v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 X_1 + \alpha_6 Y_1$$

Pour les 3 nœuds on a les relations :

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 Y_2$$

$$v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 X_2 + \alpha_6 Y_2$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 Y_3$$

$$v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 X_3 + \alpha_6 Y_3$$

Les relations précédentes s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

L'inversion de cette relation permet donc d'obtenir l'expression matricielle des déplacements u et v d'un point P_0 de l'élément en fonction du déplacement des 3 nœuds :

$$\begin{bmatrix} u(X,Y) \\ v(X,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[u] = [A][D^e]}$$

N_1, N_2, N_3 sont les fonctions d'interpolation.

$[A]$ est la matrice d'interpolation des déplacements d'un point P_0 situé à l'intérieur de l'élément triangulaire de membrane à 3 nœuds, à partir des déplacements $[D^e]$ des nœuds de l'élément.

$$\boxed{[A] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}$$

On montre que : $N_1 = \frac{1}{2A} ((X_2Y_3 - X_3Y_2) + (Y_2 - Y_3)X + (X_3 - X_2)Y)$

A est l'aire du triangle. N_2 et N_3 s'obtiennent par permutation circulaire.

$$A = \frac{1}{2} (X_1y_{23} + X_2y_{31} + X_3y_{12}) \quad \text{avec :} \quad y_{ij} = Y_i - Y_j$$

4.4.2. Matrice d'interpolation des déformations [B] :

Par dérivation de [u] on obtient la matrice des déformations dans l'élément.

$$[\varepsilon] = [\mathcal{D}][\mathbf{u}]$$

$[\mathcal{D}]$ est la matrice des opérateurs différentiels.

En reportant $[\mathbf{u}] = [\mathbf{A}][\mathbf{D}^e]$ dans $[\varepsilon] = [\mathcal{D}][\mathbf{u}]$ on obtient : $[\varepsilon] = [\mathcal{D}][\mathbf{A}][\mathbf{D}^e]$

Posons :

$$[\mathbf{B}] = [\mathcal{D}][\mathbf{A}]$$

$[\mathbf{B}]$ est la matrice d'interpolation des déformations d'un point P_0 dans l'élément.

Les déformations en un point P_0 à l'intérieur de l'élément sont donc interpolées à partir des déplacements $[\mathbf{D}^e]$ des nœuds de l'élément.

$$[\varepsilon] = [\mathbf{B}][\mathbf{D}^e]$$

4.4.3. Matrice des contraintes $[\sigma]$:

La loi de LAMÉ permet de calculer $[\sigma]$ à partir de $[\varepsilon]$: $[\sigma] = [\mathbf{C}][\varepsilon]$

$[\mathbf{C}]$ est la matrice des constantes élastiques du matériau. Compte tenu de $[\varepsilon] = [\mathbf{B}][\mathbf{D}^e]$, $[\sigma]$ s'écrit :

$$[\sigma] = [\mathbf{C}][\mathbf{B}][\mathbf{D}^e]$$

Les contraintes en un point P_0 à l'intérieur de l'élément sont interpolées à partir des déplacements $[\mathbf{D}^e]$ des nœuds de l'élément.

4.4.4. Matrice de rigidité $[k^e]$ d'un élément libre :

Dans le cas d'un solide quelconque de volume V_0 , le travail de déformation se calcule par :

$$W_{déf} = \int_{V_0} \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

Soit sous forme matricielle :

$$W_{déf} = \int_{V_0} \frac{1}{2} [\sigma][\varepsilon] dV$$

Compte tenu que $[\sigma] = [C][B][D^e]$ et que $[\varepsilon] = [B][D^e]$, le travail de déformation dans l'élément se calcule par (V_e est le volume de l'élément) :

Les déplacements nodaux $[D^e]$ étant constants $W_{déf}$ s'écrit :

$$W_{déf}^e = \int_{V_e} \frac{1}{2} [D^e]^t [B][C][B][D^e] dV \quad \text{or} \quad W_{déf}^e = \frac{1}{2} [D^e]^t [k^e] [D^e]$$

On obtient en identifiant les deux expressions de $W_{déf}$ l'expression de la matrice de rigidité élémentaire :

$$[k^e] = \int_{V_e} {}^t [B][C][B] dV$$

Cette relation permet de calculer la matrice de rigidité $[k^e]$ d'un élément libre à partir de la matrice $[B]$ d'interpolation des déformations dans l'élément et de la matrice des constantes élastiques $[C]$ du matériau.

- La matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ est symétrique ($[C]$ est symétrique)

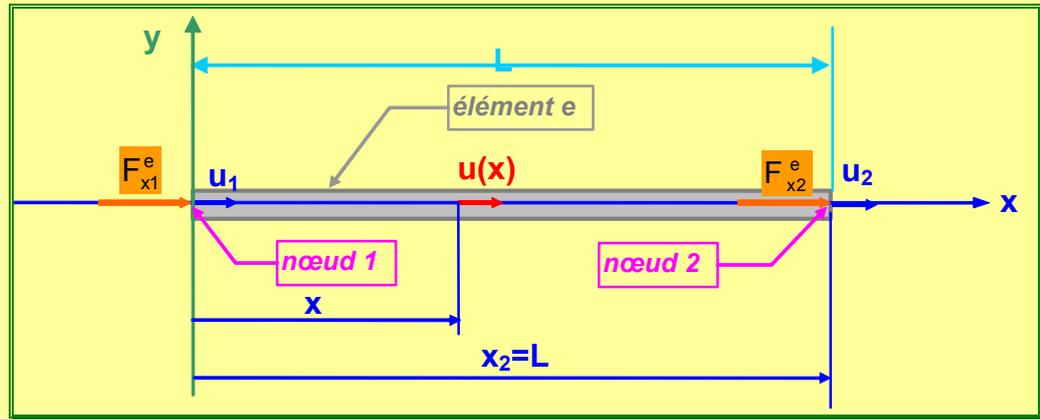
$${}^t [k^e] = \int_{V_e} {}^t [B][C][B] dV = \int_{V_e} [B][C][B] dV = [k^e]$$

- La matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ d'un élément libre est singulière (son inverse $[k^e]^{-1}$ n'existe pas), car l'élément libre n'appartient pas à une structure en équilibre (mouvement de corps rigide possible).

4.4.5. Matrices de rigidité d'un élément poutre droite à deux nœuds

La formulation est faite dans les axes locaux. Les sollicitations traction, torsion flexion dans les plans xy et yz peuvent se traiter séparément.

Traction-Compression :



Rappels théoriques :

La théorie des poutres en traction uniaxiale montre que :

1°) Le déplacement axial $u(x)$ des sections droites est proportionnel à l'abscisse x de la section.

2°) La déformation axiale vaut $\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$

3°) La loi de LAMÉ $[\sigma] = [C][\epsilon]$ se réduit à $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$, donc $[C]=E$.

- Calcul de [A], matrice d'interpolation des déplacements :

La fonction d'interpolation du déplacement $u(x)$ est linéaire.

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \qquad u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$u(0) = u_1 = \alpha_1 \qquad u(L) = u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L$$

L'inversion de cette relation donne :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

s'écrit :

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u(x) = [A][D^e] \quad \text{avec :} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$[A] = [N_1(x) \mid N_2(x)] \quad u(x) = [N_1(x) \mid N_2(x)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont les fonctions d'interpolation. La matrice $[A] = [N_1(x) \mid N_2(x)]$ est la matrice d'interpolation des déplacements.

- Calcul de [B] :

La matrice des opérateurs différentiels se réduit à :

$$[D] = \frac{d}{dx} \quad [B] = [D][A] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

[B] est la matrice d'interpolation des déformations.

- Calcul de [C]. $[C] = E$

- Calcul de [k^e] :

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV$$

$$[k^e] = \int_{V_e} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dV = E \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_{V_e} dV \quad \text{or} \quad \int_{V_e} dV = AL \text{ est le}$$

volume de l'élément.

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice carrée symétrique $[k^e]$ est la matrice de rigidité d'un élément libre en traction-compression (ou matrice de rigidité élémentaire en traction-compression). Notez que la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ est singulière (son déterminant est nul si additionne les 2 lignes ou les 2 colonnes). Elle relie les efforts d'extrémité de l'élément et les déplacements des noeuds

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad [P^e] = [k^e][D^e]$$

Torsion des barres à sections droites circulaires :

Rappels théoriques :

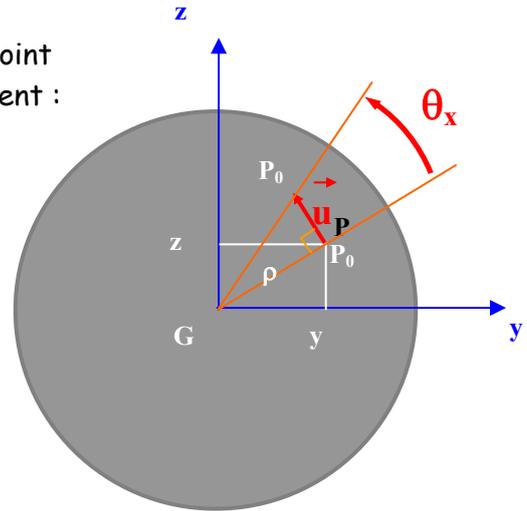
La théorie des cylindres en torsion montre que :

1°) La rotation θ_x des sections droites est proportionnelle à l'abscisse x de la section.

Par conséquent, les déplacements v et w d'un point P_0 d'une section droite située à l'abscisse x valent :

$$\vec{u} = \vec{\theta}_x \wedge \vec{GP}_0 = \begin{vmatrix} \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \\ 0 & -z & y \end{vmatrix}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u = 0 \\ v = -z\theta_x \\ w = y\theta_x \end{bmatrix}$$

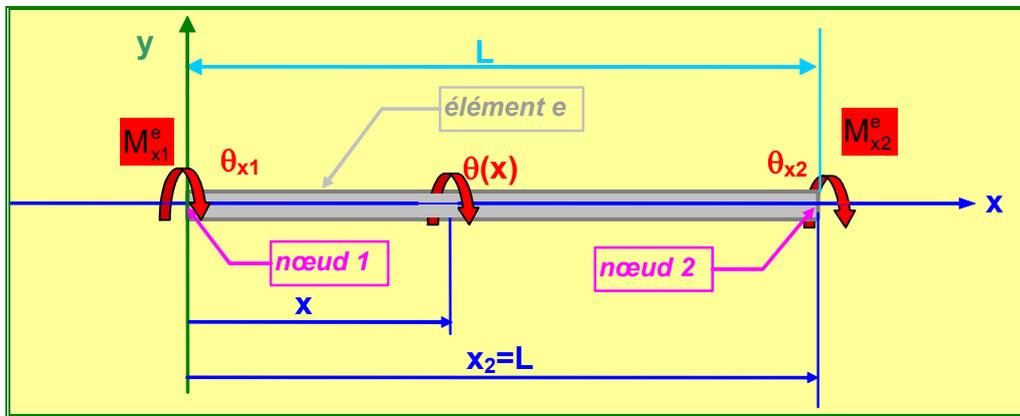


2°) La distorsion des génératrices (la déformation de torsion) vaut :

$$\gamma = \rho \frac{\theta_x^{\max i}}{L} = \rho \theta'_x$$

3°) La loi de LAMÉ $[\sigma] = [C][\varepsilon]$ se réduit à $\tau = G\gamma$, donc $[C]=G$.

On constate donc que les déplacements v, w d'un point P_0 de l'élément, la déformation γ et la contrainte de torsion τ ne dépendent que de la rotation θ_x de la section droite. Nous allons donc prendre ce paramètre pour traiter la torsion.



- Calcul de [A]

La fonction d'interpolation la rotation $\theta(x)$ est linéaire. $\theta(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

Un raisonnement identique à celui de la traction-compression conduit à :

$$\theta(x) = [A][D^e] \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$[A] = [N_1(x) \mid N_2(x)] \quad u(x) = [N_1(x) \mid N_2(x)] \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}$$

$N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

La matrice $[A] = [N_1(x) \mid N_2(x)]$ est la matrice d'interpolation des déplacements.

- Calcul de [B]

$$\gamma = \rho \theta'_x = \rho \frac{d}{dx} \theta_x \quad [\mathcal{D}] = \rho \frac{d}{dx} \quad [B] = \rho \frac{d}{dx} [A] = \rho \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \rho \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

- Calcul de [C] $[C] = G$

- Calcul de $[k^e]$ $[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV$

$$[k^e] = \int_{V_e} G \rho^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dV = G \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_{V_e} \rho^2 dV = G \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_S \rho^2 dA \int_0^L dx$$

Compte tenu que $\int_S \rho^2 dA = I_G$ et $\int_0^L dx = L$

$$[k^e] = \frac{GI_G}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x1}^e \\ M_{x2}^e \end{bmatrix} = \frac{GI_G}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix} \quad [P^e] = [k^e] [D^e]$$

La matrice carrée symétrique $[k^e]$ est la matrice de rigidité d'un élément libre en torsion.

Flexion dans le plan xy :

Rappels théoriques :

La théorie des poutres en flexion montre que :

1°) La flèche v est une fonction du troisième degré en x .

2°) En flexion (comme en traction) la déformation axiale ϵ_{xx} vaut $\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$.

Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée (les sections droites sont indéformables). Donc :

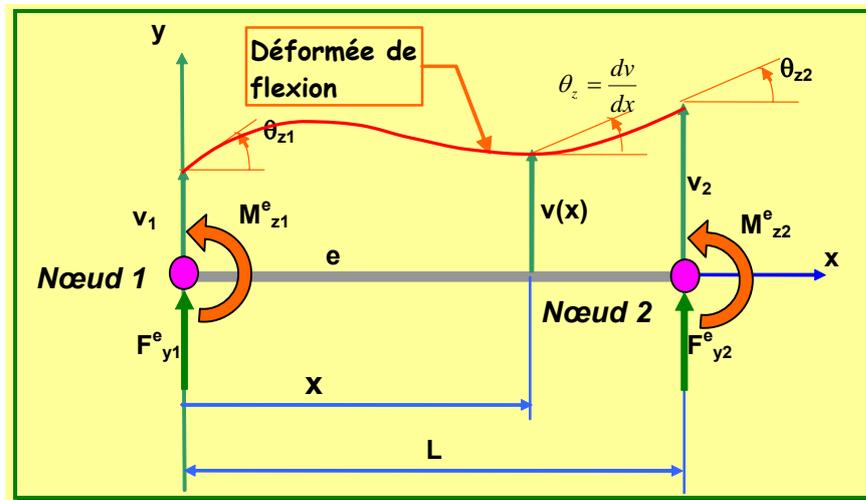
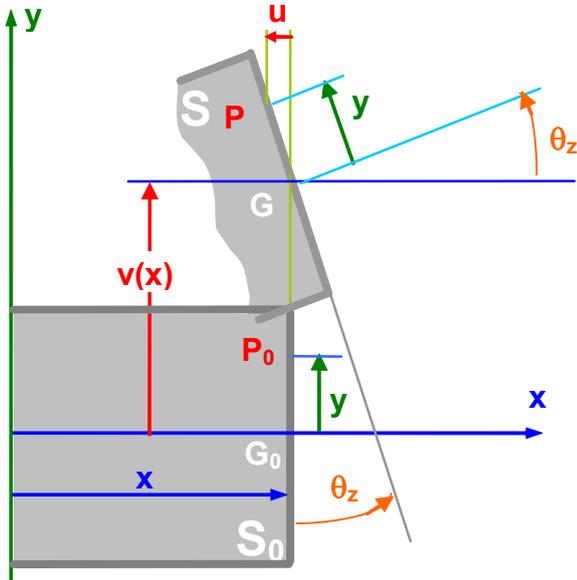
$$u = -y\theta_z$$

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} \quad \text{Par conséquent :}$$

$$u = -y \frac{dv}{dx}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

3°) La loi de LAMÉ $[\sigma] = [C][\epsilon]$ de réduit à $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$ donc $[C]=E$.



- Calcul de [A], matrice d'interpolation des déplacements :

La fonction d'interpolation du déplacement $v(x)$ une fonction du troisième degré.

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$v(0) = v_1 = \alpha_1$$

$$v(L) = v_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3$$

Compte tenu de $\theta_z = \frac{dv}{dx}$ $\theta_z = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$

$$\theta_z(0) = \theta_{z1} = \alpha_2$$

$$\theta_z(L) = \theta_{z2} = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2$$

Les 4 relations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

L'inversion de cette relation donne :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \text{ s'écrit : } v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$v(x) = [A][D^e]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[A] = [N_1(x) \mid N_2(x) \mid N_3(x) \mid N_4(x)]$$

$N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ et $N_4(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

$$v(x) = [N_1(x) \mid N_2(x) \mid N_3(x) \mid N_4(x)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

- Calcul de [B] :

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad [D] = -y \frac{d^2}{dx^2} \quad [B] = [D][A]$$

Compte tenu que :

$$[B] = -y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

- Calcul de [C] : $[C] = E$

- Calcul de $[k^e]$: $[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV$

$$[k^e] = \int_{V_e} E y^2 \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dV$$

$$k_{11}^e = E \int_{V_e} y^2 \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)^2 dV = E \int_S y^2 dA \int_0^L \left(+\frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6}\right) dx$$

$$\int_S y^2 dA = I_z$$

$$k_{11}^e = EI_z \left[\frac{36}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} + \frac{48x^3}{L^6} \right]_0^L = \frac{EI_z}{L^3} [36 - 72 + 48] \qquad k_{11}^e = \frac{12EI_z}{L^3}$$

On procède de même pour les autres termes de $[k^e]$.

Finalement la matrice de rigidité s'écrit :

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[P^e] = [k^e] [D^e]$$

La matrice carrée symétrique $[k^e]$ est la matrice de rigidité d'un élément libre en flexion dans le plan xy. Elle est singulière ($C_1+C_3=0$). Elle relie les efforts d'extrémité de l'élément et les déplacements des noeuds

$$\begin{bmatrix} F_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{y1} \\ \theta_{z1} \\ v_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Traction-Compression, torsion, flexion dans les plans xy et zx :

$$[k^e] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ & & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ & & & GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 \\ & & & & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ & & & & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ & & & & & & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & & & & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & GJ/L & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4EI_y/L & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix}$$

SYM

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ F_{z1}^e \\ M_{x1}^e \\ M_{y1}^e \\ M_{z1}^e \\ F_{x2}^e \\ F_{y2}^e \\ F_{z2}^e \\ M_{x2}^e \\ M_{y2}^e \\ M_{z2}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ & & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ & & & GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 \\ & & & & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ & & & & & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ & & & & & & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ & & & & & & & & 12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & GJ/L & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4EI_y/L & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4EI_z/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ v_{y1} \\ w_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{x2} \\ v_{y2} \\ w_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

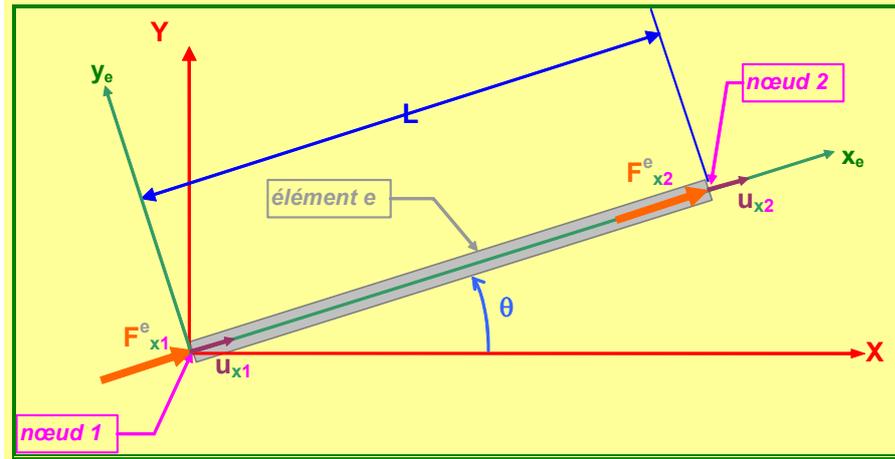
SYM

4.5. Rotation du repère dans le plan:

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies dans les repères locaux de chaque élément (x_e, y_e pour l'élément "e").

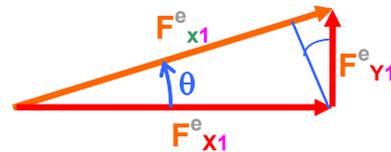
Examinons ce que devient la matrice $[k^e]$ de l'élément "e" lorsqu'on change de repère et que l'on passe du repère global XY (l'ancien repère) au repère local x_e, y_e (le nouveau repère) par la rotation d'angle θ .

Considérons, à titre d'exemple, un élément poutre en traction-compression dans le plan.



Les relations entre les composantes des vecteurs sur les deux repères sont :

Pour le vecteur force s'exerçant sur le nœud 1 :
$F_{x1}^e = F_{X1}^e \cos \theta + F_{Y1}^e \sin \theta$
Pour le vecteur déplacement du nœud 1 :
$u_{x1} = u_{X1} \cos \theta + u_{Y1} \sin \theta$
local xy global XY



On a donc, pour les deux nœuds et pour les forces :

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{x2}^e \end{bmatrix}_{local\ xy} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{X1}^e \\ F_{Y1}^e \\ F_{X2}^e \\ F_{Y2}^e \end{bmatrix}_{global\ XY}$$

Pour les deux nœuds et pour les déplacements :

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix}_{local\ xy} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{X1} \\ v_{Y1} \\ u_{X2} \\ v_{Y2} \end{bmatrix}_{global\ XY}$$

Posons :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$[\lambda]$ est la matrice de transformation des composantes des forces des déplacements.

Nous pouvons donc écrire pour les deux extrémités :

$$\begin{aligned} [P^e]_{x,y} &= [\lambda][P^e]_{X,Y} \quad (1) \\ [D^e]_{x,y} &= [\lambda][D^e]_{X,Y} \quad (2) \end{aligned}$$

Que devient la matrice de rigidité les axes globaux ?

La relation de rigidité dans les axes locaux de l'élément s'écrit : $[P^e]_{x,y} = [k^e]_{x,y}[D^e]_{x,y}$

Compte tenu des relations (1) et (2) la relation de rigidité dans les axes locaux peut écrire :

$$[\lambda][P^e]_{X,Y} = [k^e]_{x,y}[\lambda][D^e]_{X,Y}$$

On obtient, en multipliant les deux membres de cette équation par ${}^t[\lambda]$ et compte tenu que :

$$\begin{aligned} {}^t[\lambda] &= [\lambda]^{-1} \\ [k^e]_{x,y} &= {}^t[\lambda][k^e]_{x,y}[\lambda] \end{aligned}$$

La relation de rigidité dans les axes locaux s'écrit : $[P^e]_{x,y} = [k^e]_{x,y}[D^e]_{x,y}$
en posant :

$$[k^e]_{X,Y} = {}^t[\lambda][k^e]_{x,y}[\lambda]$$

4.6. Assemblage :

L'énergie de déformation élastique pour un élément se calcule par :

$$W_{déf}^e = \frac{1}{2} {}^t[D^e][k^e][D^e]$$

L'énergie de déformation élastique de la structure discrétisée vaut :

$$W_{\text{déf}} = \sum_{\text{éléments}} W_{\text{déf}}^e$$

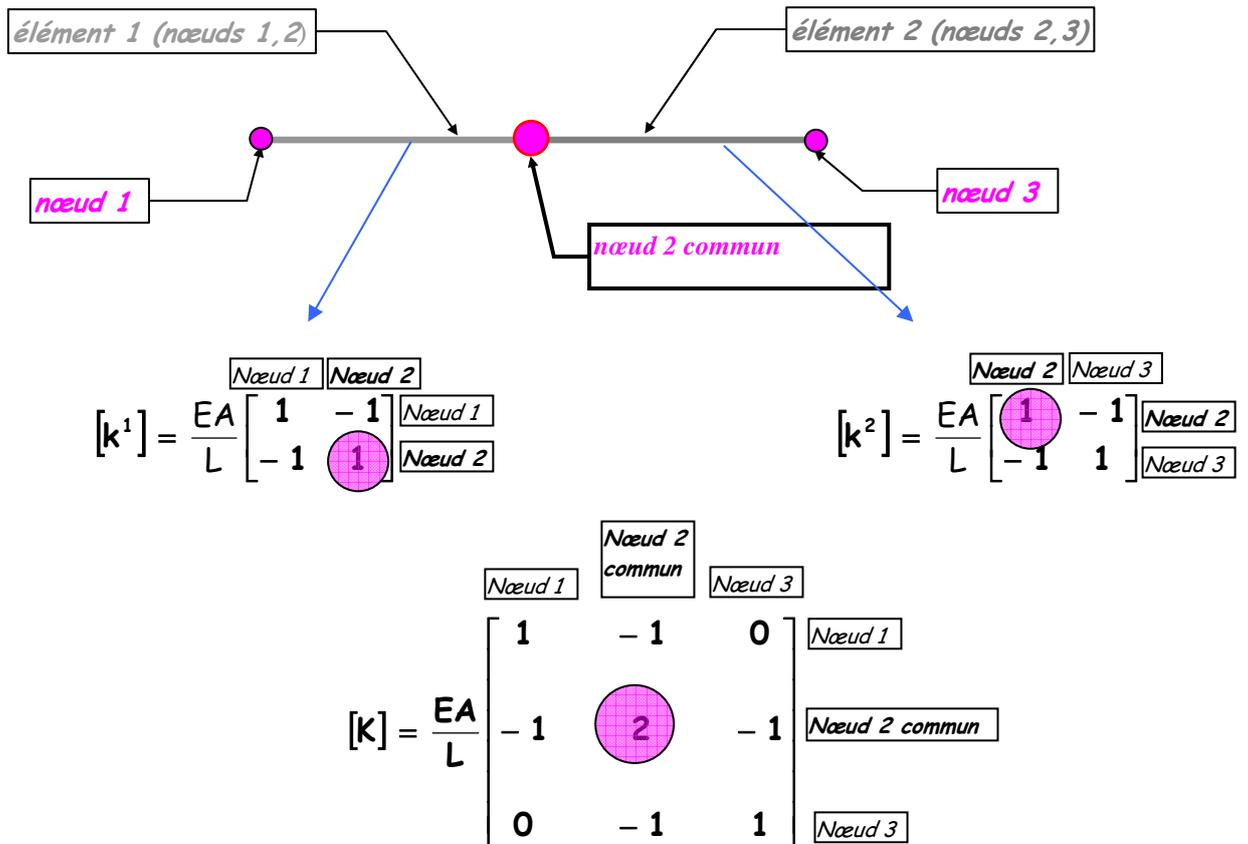
$$\frac{1}{2} [D] [K] [D] = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} [D^e] [k^e] [D^e]$$

L'identification membre à membre de cette expression permet la "construction" de la matrice de rigidité [K] de la structure $[P] = [K] [D]$

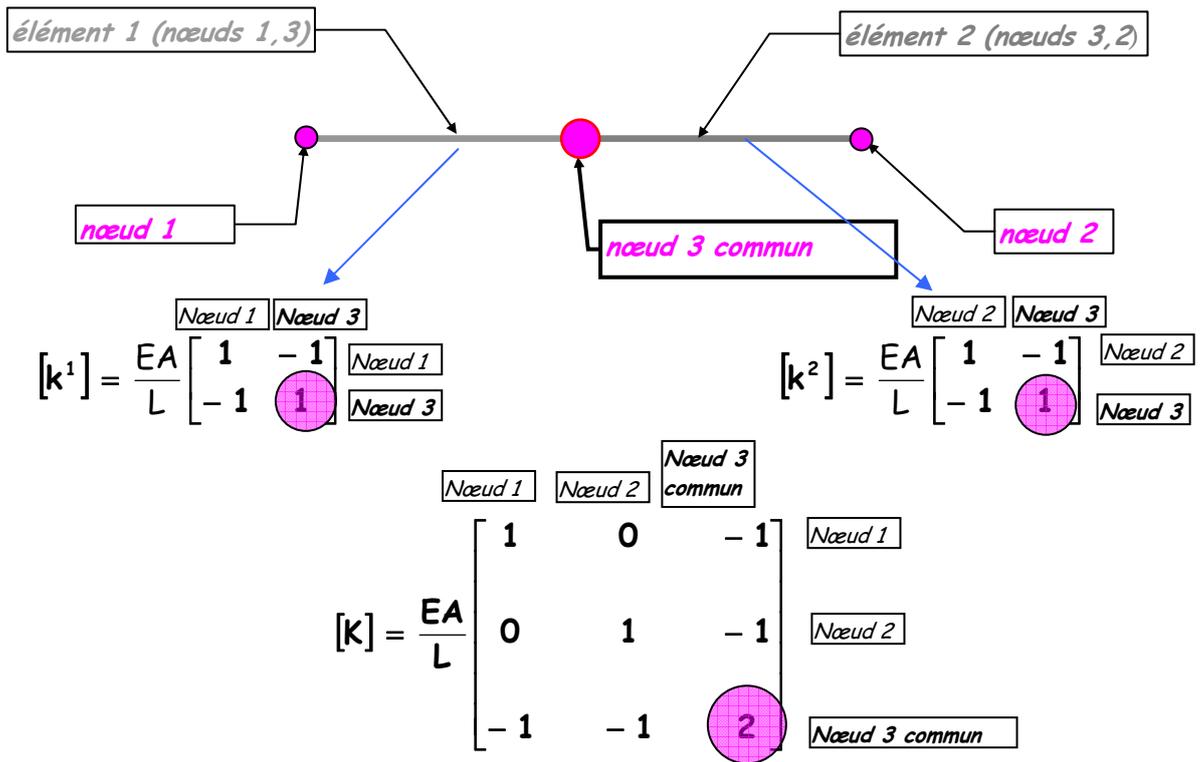
RÈGLE PRATIQUE POUR L'ASSEMBLAGE D'ÉLÉMENTS POUTRES COLINÉAIRES :

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant les sous matrice de rigidité de chaque élément possédant un nœud commun.

- Si le nœud 2 est le nœud commun :



- Si le nœud 3 est le nœud commun :



NB. Les nœuds sont toujours classés par ordre croissant dans la matrice.

4.7. Propriétés de [K] et inversion de la matrice de rigidité réduite [K_r] d'une structure :

4.7.1. Propriétés de [K]:

1°) Elle est carrée symétrique d'ordre (n×N). n est le nombre de degrés de liberté par nœud, N est le nombre de nœuds.

2°) C'est une matrice "bande".

On constate en effet que plus l'ordre de la matrice [K] est grand, plus la proportion de termes nuls est grande. L'idéal est de rassembler le plus possible les termes non nuls autour de la diagonale principale (pour former une "bande") afin d'améliorer le stockage de [K] et de diminuer le temps de calcul lors de l'inversion de [K_r] (le temps de calcul dépendant du carré de la largeur de cette bande). La largeur de la bande dépend de la numérotation des nœuds mais pas de celle des éléments.

$$\frac{1}{2} \text{ Largeur Maxi} = n(d+1)$$

GAUSS). On procède ainsi de suite jusqu'à la dernière équation qui ne comporte plus que la dernière inconnue. On calcule toutes les inconnues en « descendant » (chaque équation ne fait intervenir qu'une seule inconnue non déterminée).

Le nombre d'opérations est $n^3/3$ où n est l'ordre de la matrice.

2°) La méthode de JORDAN :

C'est une variante de la méthode de *GAUSS* qui consiste à rendre la matrice réduite diagonale.

Le nombre d'opérations est $n^3/2$ où n est l'ordre de la matrice.

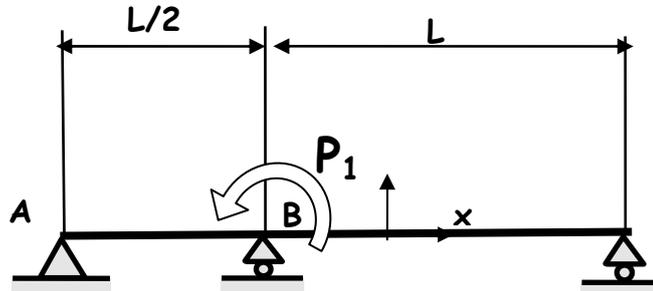
2°) La méthode de CHOLESKY :

Cette méthode consiste à transformer la matrice réduite $[K_r]$ en un produit $[L]^t[L]$ tel que la matrice $[L]$ soit triangulaire inférieure.

4. PROBLEMES DE SYNTHESE

PROBLÈME N°21

1^{ère} partie



Considérons la poutre droite ABC hyperstatique ci-dessus. Toutes les liaisons sont des articulations. La section droite de la poutre est constante et son moment d'inertie de flexion est noté I_y . Le module de YOUNG du matériau est E. La poutre est soumise à un couple de flexion P_1 appliqué en B.

Prenez comme inconnue hyperstatique la réaction en C (une force P_2 dirigée vers le haut \uparrow).

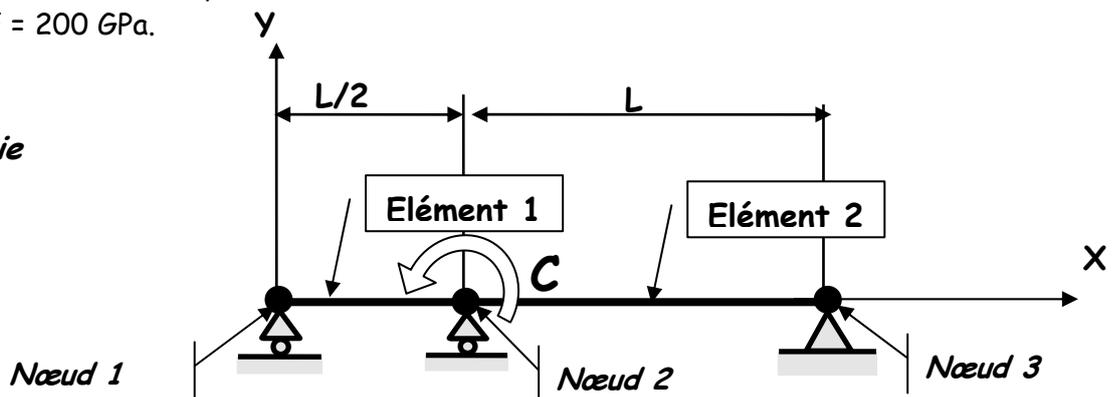
La méthode de résolution est au choix celle de CASTIGLIANO, ou celle de MAXWELL-MOHR. Dans les deux méthodes l'énergie de déformation due à l'effort tranchant sera négligée devant l'énergie de déformation due au moment fléchissant. Si vous choisissez la méthode de MAXWELL-MOHR écrivez l'expression littérale de la matrice de flexibilité sous la forme :

$$[f] = \frac{1}{EI_y} [\]$$

Quelle que soit la méthode choisie, CASTIGLIANO ou MAXWELL-MOHR :

- 1°) Indiquez quelles sont, selon-vous, les différences essentielles entre les méthodes de CASTIGLIANO et de MAXWELL-MOHR
- 2°) Déterminez l'expression littérale de l'inconnue hyperstatique P_2 en C en fonction de P_1 et de L en précisant bien son sens (\uparrow ou \downarrow). Calculez sa valeur numérique en Newton si $P_1 = 144 \text{ Nm}$ et $L = 1 \text{ m}$.
- 3°) Déterminez l'expression littérale de la rotation en B en fonction de P_1 , L, E et I_y . Calculez sa valeur numérique en radian si la section droite a un moment d'inertie $I_y = 0.25 \text{ cm}^4$ et si $E = 200 \text{ GPa}$.

2^{ème} partie



La poutre de la 1^{ère} partie est discrétisée en deux éléments "poutre" et trois nœuds. La longueur L vaut 1m, la section droite de la poutre est constante et son moment d'inertie de flexion I_z vaut 0.25 cm^4 . Le module de YOUNG E du matériau vaut 200 GPa. La poutre est soumise au couple de flexion $C= 144 \text{ Nm}$ appliqué sur le nœud 2. Toutes les liaisons sont des articulations.

On donne la matrice de rigidité d'un élément de poutre de longueur L en flexion dans le plan XY :

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Attention ! La longueur de l'élément 1 est L/2 !

1°) Calculez numériquement (utilisez les unités SI : le mètre et le Newton) les matrices de rigidité élémentaire des deux éléments dans le repère global X,Y sous la forme :

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} [\]$$

2°) Calculez numériquement (utilisez les unités SI : le mètre et le Newton) la matrice de rigidité de la structure dans le repère global X,Y sous la forme :

$$[K] = \frac{EI_z}{L^3} [\]$$

3°) Calculez, dans le repère global X,Y les rotations en radian des nœuds 1, 2 et 3 et les réactions en Newton s'exerçant sur les nœuds 1, 2 et 3.

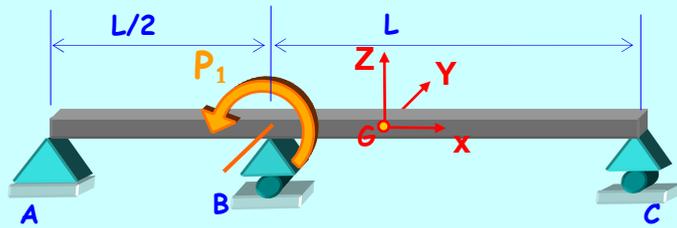
4°) Calculer en mm la flèche de la section droite située au milieu de l'élément 2. Calculez d'abord numériquement la matrice d'interpolation des déplacements [A], puis la flèche.

On donne la matrice d'interpolation des déplacements d'un élément de poutre de longueur L en flexion dans le plan XY :

$$[A] = \left[\begin{array}{cccc} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{array} \right]$$

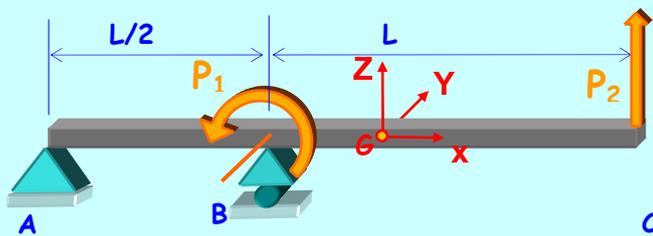
RÉPONSES N°21

1^{ère} partie

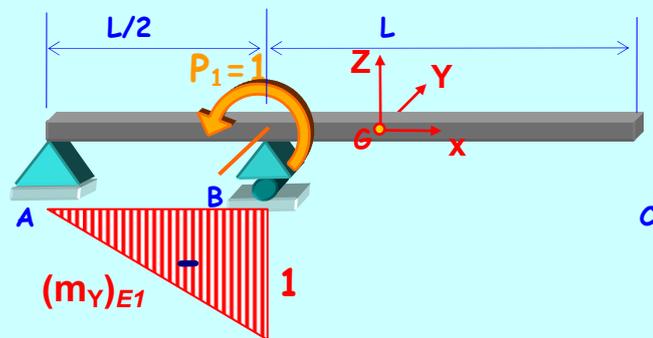


Etat E_0

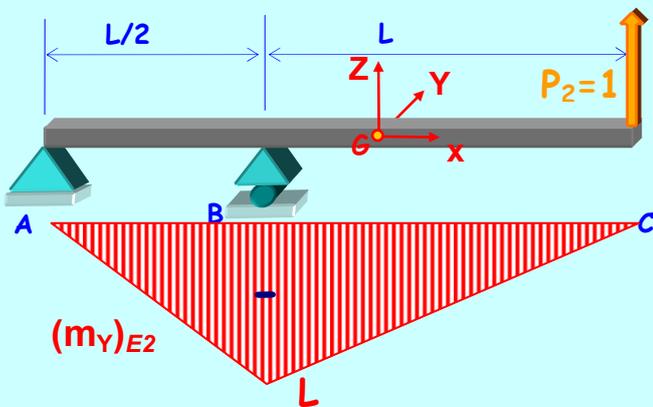
1°) La méthode de CASTIGLIANO est analytique, celle de MAXWELL-MOHR matricielle.



Etat E_0'



Etat E_1



Etat E_2

$$[D]_{E_0} = [f]_{E_0} [P]_{E_0}, \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{E_0} = \frac{1}{EI_Y} \begin{bmatrix} L & L^2 \\ 6 & 6 \\ L^2 & L^3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}_{E_0}$$

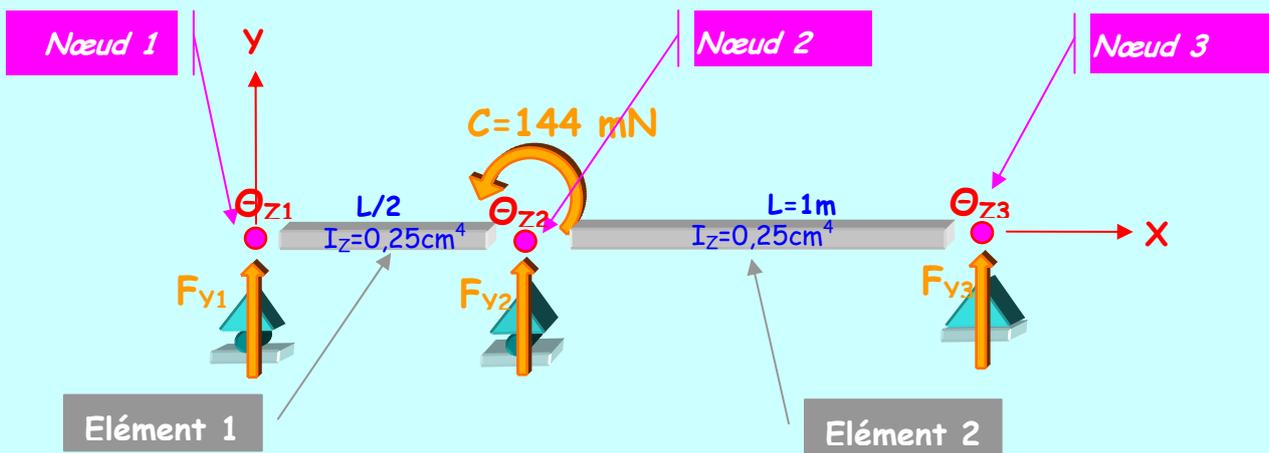
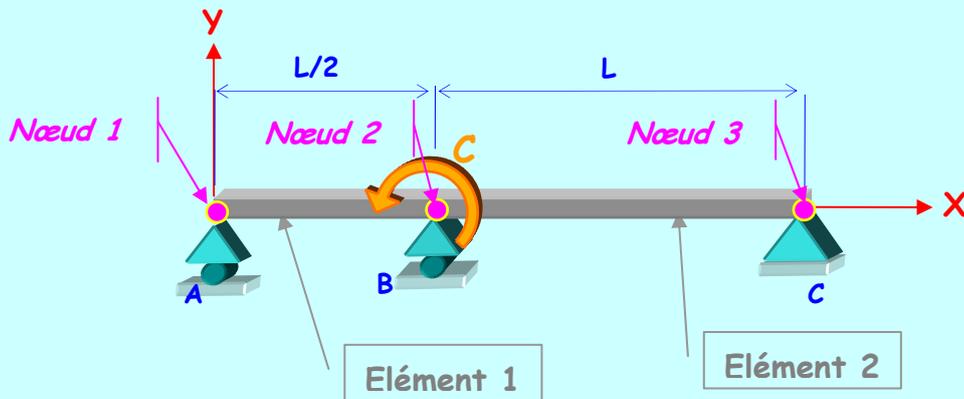
ou

$$W_{\text{déf}} = \frac{P_1^2 L}{12EI_Y} + \frac{P_1 P_2 L^2}{6EI_Y} + \frac{P_2^2 L^3}{2EI_Y}$$

$$2^\circ) P_2 = -\frac{P_1}{3L} = -48N \downarrow$$

$$3^\circ) D_1 = \frac{P_1 L}{9EI_I} = 0.032 \text{rd}$$

2^{ème} partie



1^o)

$$[k^1] = 500 \begin{bmatrix} 96 & 24 & -96 & 24 \\ 24 & 8 & -24 & 4 \\ -96 & -24 & 96 & -24 \\ 24 & 4 & -24 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = 500 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k^1] = 500 \begin{bmatrix} 96 & 24 & -96 & 24 \\ 24 & 8 & -24 & 4 \\ -96 & -24 & 108 & -18 \\ 24 & 4 & -18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 2 \\ -12 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad 500 = [k^2]$$

$$[K] = 500 \begin{bmatrix} 96 & 24 & -96 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 8 & -24 & 4 & 0 & 0 \\ -96 & -24 & 108 & -18 & -12 & 6 \\ 24 & 4 & -18 & 12 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

2°)

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ F_{y2} \\ 144 \\ F_{y3} \\ 0 \end{bmatrix} = 500 \begin{bmatrix} 96 & 24 & -96 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 8 & -24 & 4 & 0 & 0 \\ -96 & -24 & 108 & -18 & -12 & 6 \\ 24 & 4 & -18 & 12 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{z1} \\ 0 \\ \theta_{z2} \\ 0 \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

3°)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ 0 \end{bmatrix} = 500 \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \theta_{z1} &= \theta_{z3} = -0.016 \text{rd} \\ \theta_{z2} &= 0.032 \text{rd} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} F_{y1} = 192 \\ 0 \\ F_{y2} = -144 \\ 144 \\ F_{y3} = -48 \\ 0 \end{bmatrix} = 500 \begin{bmatrix} 96 & 24 & -96 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 8 & -24 & 4 & 0 & 0 \\ -96 & -24 & 108 & -18 & -12 & 6 \\ 24 & 4 & -18 & 12 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.016 \\ 0 \\ 0.032 \\ 0 \\ -0.016 \end{bmatrix}$$

4°)

$$v(x) = [A][D^e] \quad \text{avec } [A] = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]$$

$$x = \frac{L}{2} \quad L = 1\text{m} \quad [A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

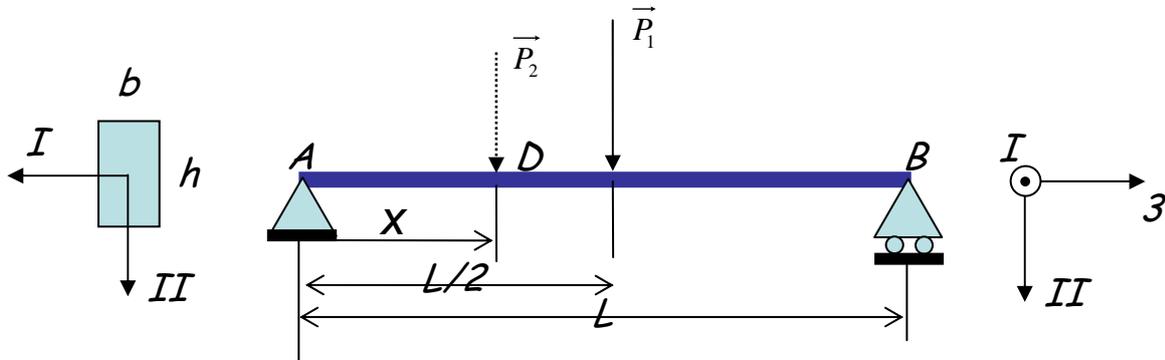
$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.032 \\ 0 \\ -0.016 \end{bmatrix} = 0.006\text{m} = 6\text{mm}$$

PROBLÈME N°22

1^{ère} partie

La poutre AB de longueur L et de section rectangulaire (b x h) repose sur deux appuis, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Une force \vec{P}_1 est appliquée au milieu de la poutre. On se propose de déterminer l'équation de la déformée de cette poutre en flexion par la méthode de Maxwell-Mohr. (On négligera l'effet de l'effort tranchant devant celui du moment fléchissant).

Pour cela, on applique une force verticale fictive \vec{P}_2 en un point D. La distance AD est variable. Le paramètre correspondant est $AD=x$ ($0 < x < L/2$).

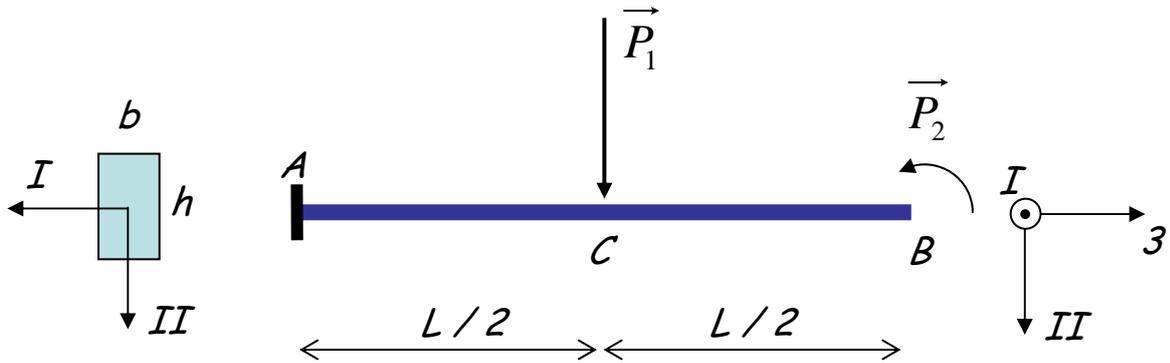


1. Justifier le choix d'introduire cette force fictive afin de déterminer l'équation de la déformée de la poutre.
2. En associant la force \vec{P}_1 à l'état #1 et la force \vec{P}_2 à l'état #2, écrire la relation entre le vecteur des charges, le vecteur des déplacements et la matrice de flexibilité.
3. Calculer les termes de flexibilité nécessaires à la résolution du problème.
4. Déterminer l'équation de la déformée de la poutre.
5. En déduire la position et la valeur de la flèche maximale.

2^{ème} partie

La poutre de la 1^{ère} partie est désormais encastree en A. Une force verticale \vec{P}_1 est appliquée en son centre (point C). Un couple \vec{P}_2 porté par l'axe I est appliquée à son extrémité (point B).

Données numériques : $L = 500 \text{ mm}$ $E = 210\,000 \text{ MPa}$
 $b = 20 \text{ mm}$ $h = 30 \text{ mm}$ $K = 10^6 \text{ N/m}$ $|\vec{P}_2| = 1000 \text{ Nm}$



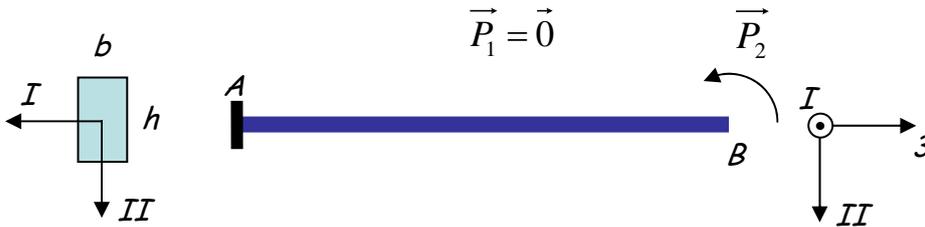
On utilisera la méthode de **Castigliano**. (On négligera l'effet de l'effort tranchant devant celui du moment fléchissant).

- Déterminer l'expression littérale de l'énergie de déformation stockée dans la poutre ABC. Puis l'écrire sous la forme

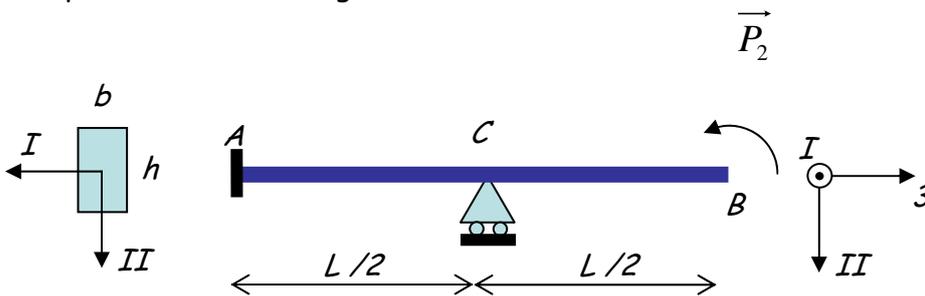
$$w_{\text{def}} = \alpha \cdot P_1^2 + \beta \cdot P_2^2 + \gamma \cdot P_1 \cdot P_2$$

Dans la suite du problème, on utilisera les variables α, β, γ dans les développements.

- Calculer (forme littérale et application numérique) la flèche en B et C pour la même poutre dans la configuration suivante

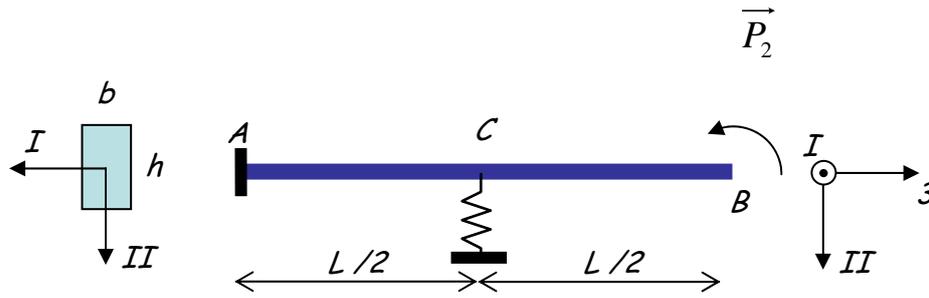


- Calculer (forme littérale et application numérique) la flèche en B et la réaction en C pour la même poutre dans la configuration suivante



- Calculer (forme littérale et application numérique) la flèche en B et en C, ainsi que la réaction en C pour la même poutre dans la configuration suivante (le ressort a une raideur K). En dehors de tout chargement, le ressort n'exerce aucune force sur la

poutre)



Réponses:

1^{ère} partie

2^{ème} partie

RÉPONSES N°22



ANNEXE A1. INTEGRALES DE MOHR

A1.1 DEFINITION:

Les intégrales de MOHR sont des intégrales du type:

$$I_1 = \int_0^L y_1(x)y_2(x)dx$$

ou encore

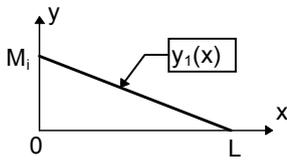
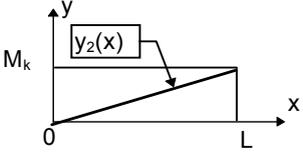
$$I_2 = \int_0^L y^2(x)dx$$

Les résultats de ces intégrales sont donnés dans une table (voir pages suivantes) pour des combinaisons de diverse fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ linéaires ou du second degré.

A1.2 UTILISATION DE LA TABLE:

1°) Intégrales de type $M_i M_k$.

Soit à calculer l'intégrale du type I_1 du produit des deux fonctions y_1 et y_2 linéaires données par leur représentation graphique ci-dessous. Les quantités M_i, M_k sont positives.

$M_i (y_1)$ $M_k (y_2)$		
.....			
		$I_1 = \int_0^L y_1 y_2 dx = \frac{1}{6} M_i M_k L$	

Vérification:

$$y_1(x) = -\frac{M_i}{L}x + M_i$$

$$y_2(x) = \frac{M_k}{L}x$$

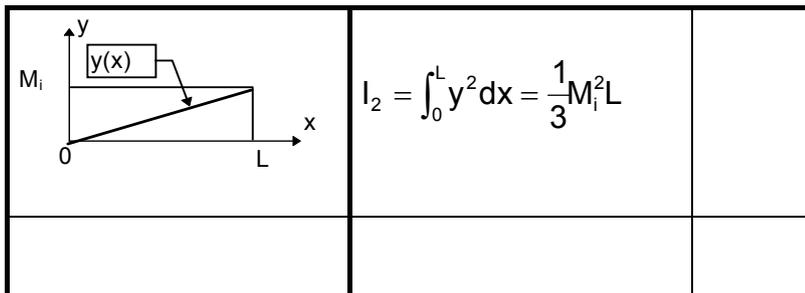
$$I_1 = \int_0^L y_1(x) y_2(x) dx = \int_0^L \left(-\frac{M_i}{L} x + M_i \right) \frac{M_k}{L} x dx = \int_0^L \left(-\frac{M_i M_k}{L^2} x^2 + \frac{M_i M_k}{L} x \right) dx$$

$$I_1 = \left[-\frac{M_i M_k}{3L^2} x^3 + \frac{M_i M_k}{2L} x^2 \right]_0^L = -\frac{M_i M_k L}{3} + \frac{M_i M_k L}{2}$$

$$I_1 = \frac{M_i M_k L}{6}$$

2°) Intégrales de type M_i^2 .

Soit à calculer l'intégrale du type I_2 de la fonction linéaire y au carré donnée par sa représentation graphique ci-dessous.



Vérification:

$$y_1(x) = \frac{M_i}{L} x$$

$$I_2 = \int_0^L y^2 dx = \int_0^L \left(\frac{M_i}{L} x \right)^2 dx = \frac{M_i^2 L}{3}$$

A1.3 TABLE D'INTÉGRATION :

Intégrales de MOHR (type M_i M_k)

	$M_i M_k L$	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	$\frac{1}{2} M_i M_k L$
	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	$\frac{1}{4} M_i M_k L$	$\frac{1}{6} M_i M_k L (1 + \frac{X'}{L})$
	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	$\frac{1}{6} M_i M_k L$	$\frac{1}{4} M_i M_k L$	$\frac{1}{6} M_i M_k L (1 + \frac{X'}{L})$
	$\frac{1}{2} M_i M_k L$	$\frac{1}{4} M_i M_k L$	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	
	$\frac{1}{2} M_i (M'_k + M''_k) L$	$\frac{1}{6} M_i (2M'_k + M''_k) L$	$\frac{1}{4} M_i (M'_k + M''_k) L$	$\frac{1}{6} M_i [M'_k (1 + \frac{X'}{L}) + M''_k (1 + \frac{X'}{L})] L$
	$\frac{1}{2} M_i (M'_k - M''_k) L$	$\frac{1}{6} M_i (2M'_k - M''_k) L$	$\frac{1}{4} M_i (M'_k - M''_k) L$	$\frac{1}{6} M_i [M'_k (1 + \frac{X'}{L}) - M''_k (1 + \frac{X'}{L})] L$
	0	$\frac{1}{6} M_i M_k L$	0	$\frac{1}{3} M_i M_k L \frac{\bar{X}}{L}$
	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	$\frac{1}{4} M_i M_k L$	$\frac{7}{48} M_i M_k L$	$\frac{1}{12} M_i M_k L (\frac{3X'}{L} + \frac{X'^2}{L^2})$
	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	$\frac{1}{12} M_i M_k L$	$\frac{7}{48} M_i M_k L$	$\frac{1}{12} M_i M_k L (\frac{3X}{L} + \frac{X^2}{L^2})$
	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	$\frac{1}{3} M_i M_k L$	$\frac{5}{12} M_i M_k L$	$\frac{1}{3} M_i M_k L (1 + \frac{XX'}{L^2})$
	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	$\frac{1}{6} M_i M_k L$	$\frac{17}{48} M_i M_k L$	$\frac{1}{12} M_i M_k L (3 + \frac{3X}{L} - \frac{X^2}{L^2})$
	$\frac{2}{3} M_i M_k L$	$\frac{5}{12} M_i M_k L$	$\frac{17}{48} M_i M_k L$	$\frac{1}{12} M_i M_k L (3 + \frac{3X'}{L} - \frac{X'^2}{L^2})$

Intégrales de MOHR (type MiMk)

M_k	M_i	M_i	M_i	
$L_1 < L_2$	$\frac{M_i M_k}{12 L_2} (3 L^2 - 4 L_1^2)$	$\frac{M_i M_k L_2}{6 a_2 L_1} (L^2 - L_2^2 - a_1^2)$	$\frac{M_i M_k L_1}{6 a_1 L_2} (L^2 - a_2^2 - L_1^2)$	
$L_1 > L_2$	$\frac{M_i M_k}{12 L_1} (3 L^2 - 4 L_2^2)$			

Intégrales de MOHR (type Mi²)

	$M_i^2 L$		$\frac{1}{5} M_i^2 L$
	$\frac{1}{3} M_i^2 L$		$\frac{1}{5} M_i^2 L$
	$\frac{1}{3} M_i^2 L$		$\frac{8}{15} M_i^2 L$
	$\frac{1}{3} M_i^2 L$		$\frac{8}{15} M_i^2 L$
	$\frac{1}{3} M_i^2 L$		$\frac{8}{15} M_i^2 L$
	$\frac{1}{3} (M_i'^2 + M_i' M_i + M_i^2) L$		
	$\frac{1}{3} (M_i'^2 - M_i' M_i + M_i^2) L$		

ANNEXE A2. MOMENTS FLÉCHISSANTS DANS QUELQUES CAS SIMPLES :

