

Contrôle continu de Probabilités Avancées - 21/10/2024

Calculatrice type collège non nécessaire mais autorisée.

Toute réflexion sera prise en compte pour chacune des questions. S'il vous manque une information, répondez à la question au maximum (si vous ne connaissez pas une densité f par exemple).

*Les exercices sont indépendants et peuvent être fait dans n'importe quel ordre. Les réponses aux questions peuvent également être fournies dans n'importe quel ordre, à condition de **clairement indiquer** leur numéro et l'exercice correspondant.*

Exercice 1 Cours

1. Que doit-on vérifier pour montrer qu'une fonction f est une densité ?
2. Pour une variable aléatoire réelle à densité, quel est le lien entre la fonction de répartition et la densité de probabilité ?
3. Donner la formule de la covariance pour (X, Y) des variables aléatoires réelles.
4. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Quelles propriétés doit-elle vérifier pour être une fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires (un vecteur de dimension 2) ? Y-a-t-il une différence avec les propriétés nécessaires pour une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle ?
5. Donner la formule de probabilités totales. Préciser les notations et hypothèses.

Exercice 2 Calcul de densité d'un couple

Soit X_1 une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Soit X_2 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

On suppose X_1 et X_2 indépendants.

On définit le couple (Y_1, Y_2) de variables aléatoires, donné par $Y_1 = X_1 + X_2 := g_1(X_1, X_2)$ et $Y_2 = \sqrt{X_2} := g_2(X_1, X_2)$.

1. A première vue, quelles sont les valeurs possibles pour Y_1 ? Pour Y_2 ?
2. Poser le système d'équation sur x_1, x_2, y_1, y_2 puis le résoudre pour obtenir les fonctions h_1 et h_2 telles que $y_1 = h_1(x_1, x_2)$ et $y_2 = h_2(x_1, x_2)$.

3. Montrer que la matrice jacobienne est donnée par

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}.$$

4. Calculer la densité de (Y_1, Y_2) .

Exercice 3 *Lois discrètes*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
0	a	$1/8$	$1/32$
1	b	c	$1/32$

1. Quelles conditions vérifient a, b et c pour que le tableau précédent soit celui d'une loi de probabilité ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Calculer $\mathbb{E}(Y|X = 1)$.
4. Dans cette question, on va supposer des informations sur les lois de X et de Y . On suppose d'abord que X suit une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$.
 - (a) Quelles conditions supplémentaires doivent vérifier a, b et c ? En déduire la valeur de a .
 - (b) On suppose en plus que Y suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?
Indication : on peut utiliser $\mathbb{P}(Y = 2)$.
 - (c) En déduire les valeurs des paramètres b et c .
 - (d) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ sous ces hypothèses. Calculer ensuite $\mathbb{E}(Y|X = 1)$.
 - (e) En déduire si X et Y sont indépendantes.