

Résumé - Espaces vectoriels et normes

Structure d'espace vectoriel On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) un ensemble E muni de deux lois :

- une loi interne, notée $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif. L'élément nul est noté 0_E .
- une loi externe, notée $\cdot$ qui est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E vérifiant :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x.$$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des scalaires.

Produit scalaire Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- elle est bilinéaire : pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

- elle est symétrique : pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- elle est définie positive : pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ et de plus $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire et de dimension finie s'appelle un espace **euclidien**.

On pose, pour $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, qu'on appelle norme associée au produit scalaire. $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifient certaines relations semblables aux **identités remarquables**.

Identités remarquables et inégalités importantes Pour tout x et y dans E

- **Identité remarquable** : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.
- On en déduit : $2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$.
On a égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$.
- **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Norme Une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogénéité).
- Pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**inégalité triangulaire**).

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

On peut avoir un espace vectoriel **avec une norme et sans produit scalaire** (c'est le cas de L^1).

Le même espace vectoriel peut avoir **plusieurs** normes.

On a aussi : pour tous $x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (conséquence de l'inégalité triangulaire).

Distance Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E . Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 &\iff x = y \\ \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) &= d(y, x) \\ \forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Exemples classiques

Sur $\mathbb{R}^n$: définissons pour $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \end{aligned}$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes sur $\mathbb{R}^n$.

Sur l'espace des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$: soit $I = [a, b]$ un segment et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Alors $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes sur E .

C'est le même principe pour les probabilités avec les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$!

Remarque : Tout est décrit ici en considérant $\mathbb{R}$, mais les mêmes notions existent sur $\mathbb{C}$.