



Département Génie Mécanique et Productique
Laboratoire de Dimensionnement des Structures
17 rue de France
69627 Villeurbanne cedex

Problèmes de dimensionnement des structures

Semestre N°3 – R3.MMP.02-E

CORRECTION



Rédigé par : équipe de DDS – Version N°3



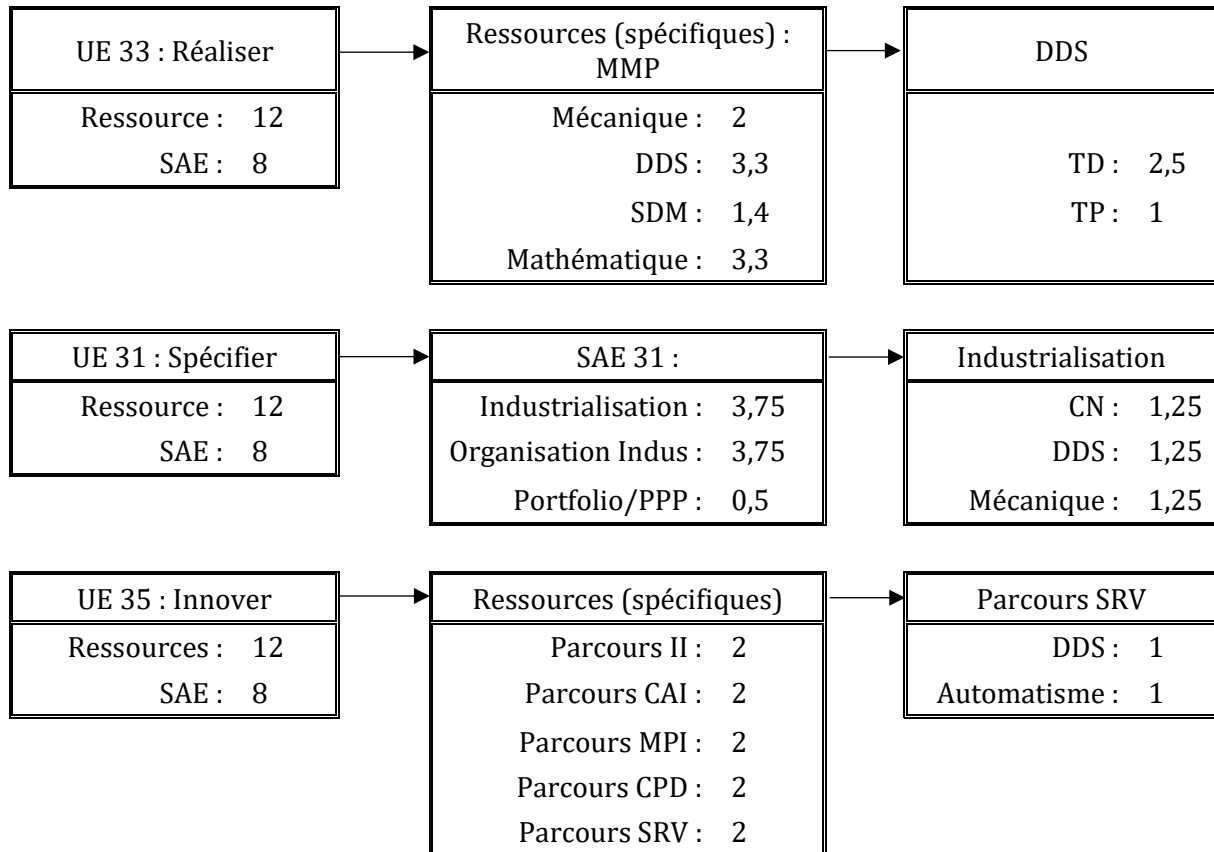


Organisation du module

Nombres d'heures :

- Amphi : 10 heures
- TD : 20 heures (10 séances de 2h) + 4 heures de SAE (2 séances de 2h)
- TP : 12 heures (3 séances de 4h) + 4 heures de découverte du parcours « SRV »

Coefficients :



Organisation des séances de TD

Calcul de déformées, SAE Industrialisation, contrainte de flexion, flexion déviée, torsion, sollicitations composées, problèmes de synthèses, flambement.

Nota :

- Les exercices non terminés en classe doivent être terminés chez vous.
- Les exercices non traités doivent vous servir d'entraînement...

Absence à un devoir

En cas d'absence à un devoir :

- Si votre absence est justifiée par la direction des études, vous avez une semaine à compter de la date du devoir pour demander par mail (benjamin.payet@univ-lyon1.fr) de rattraper. Il vous sera alors communiqué un horaire pour venir passer l'examen de rattrapage.
- Si votre absence n'est pas justifiée par la direction des études : 0 au devoir

Les correspondances des liaisons en DDS - Méca - Conception

Le tableau ci-dessous donne la correspondance des notations que vous pourrez rencontrer tout au long des modules de DDS pour la résolution de problèmes plans :

Nom de la liaison	Symbole DDS	Symbole normalisé
Appui simple		
Articulation		
Encastrement		
Appui plan		

Méthodologie pour la recherche du point le plus sollicité d'une structure

Etape N°1 : Réalisez le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) agissant sur la structure.

Etape N°2 : Déplacez (méthode du bras de levier ou Varignon) l'ensemble des actions mécaniques extérieures au point où il y a le plus grand nombre d'inconnues.

Etape N°3 : Appliquez le PFS :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \overrightarrow{R_{\text{ext} \rightarrow S}} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M_{\text{ext} \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Etape N°4 : Etablir pour chaque tronçon de poutre le torseur des actions internes (torseur de section)





Etape N°5 : Tracez sur un diagramme chaque sollicitation en fonction de la longueur du tronçon. Inscrivez les valeurs extrêmes.

Etape N°6 : Déduire graphiquement le point le plus sollicité

Nota : Cette méthodologie marche toujours, mais dès fois on peut aller plus vite... Mouahahahah



Fiche d'avancement

	N°				Remarques/Questions
	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	22	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	23	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	26	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



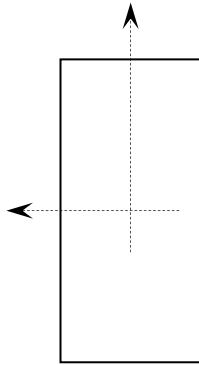
Caractéristiques des sections



Problème N°1 : Etude de sections

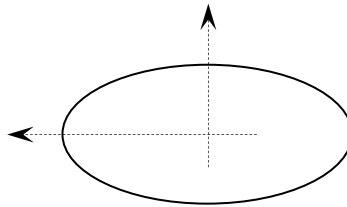
Complétez le système d'axes ainsi que les données manquantes pour les trois sections ci-dessous avec I_{Gy} et I_{Gz} les moments quadratiques en G respectivement dans la direction y et z et I_G le moment polaire en G :

Section N°1



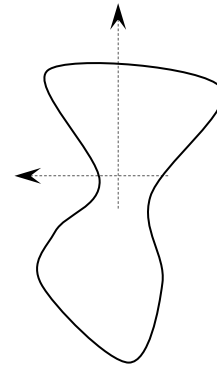
I_{Gy} [mm⁴] : 283
 I_{Gz} [mm⁴] : 1290
 I_G [mm⁴] :

Section N°2



I_{Gy} [mm⁴] : 345
 I_{Gz} [mm⁴] :
 I_G [mm⁴] : 2679

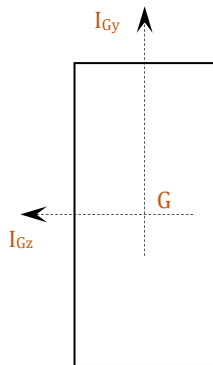
Section N°3



I_{Gy} [mm⁴] :
 I_{Gz} [mm⁴] : 23
 I_G [mm⁴] : 236

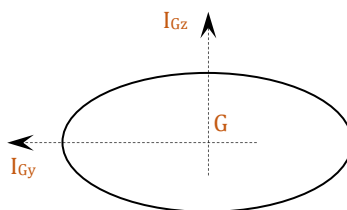
CORRECTION

Section N°1



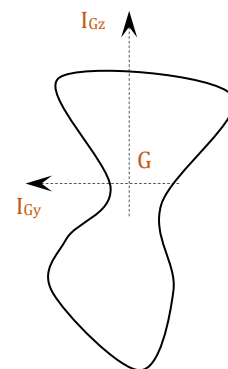
I_{Gy} [mm⁴] : 283
 I_{Gz} [mm⁴] : 1290
 I_G [mm⁴] : 1573

Section N°2



I_{Gy} [mm⁴] : 345
 I_{Gz} [mm⁴] : 2334
 I_G [mm⁴] : 2679

Section N°3



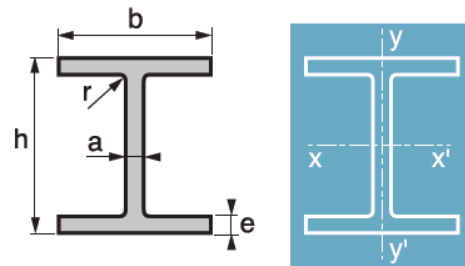
I_{Gy} [mm⁴] : 213
 I_{Gz} [mm⁴] : 23
 I_G [mm⁴] : 236

Problème N°2 : Simplification d'une section

Proposez une simplification de géométrie pour la section d'une poutre IPN80 ci-dessous et comparez les moments quadratiques obtenus avec ceux annoncés par le constructeur.



POUTRELLES HEA.A à larges ailes

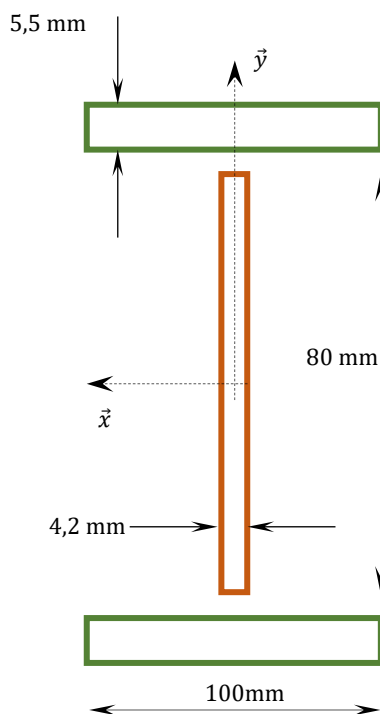


Profil	h(mm)	b(mm)	a(mm)	e(mm)	r(mm)	I _x (cm ⁴)	I _y (cm ⁴)
100	91	100	4,2	5,5	12	237	92

Figure N°1 : Extrait d'un catalogue constructeur (source : <https://www.edoc.descours-cabaud.com>)

CORRECTION

On se propose de décomposer la structure en trois rectangles (on néglige donc les congés de raccordement). Ainsi :



$$I_{Gx} = 2 \cdot \left[\frac{100 \cdot 5,5^3}{12} + (42,75)^2 \cdot (5,5 \cdot 100) \right] + \frac{4,2 \cdot 80^3}{12} = 2192291,6 \text{ mm}^4$$

Soit : 8% d'écart avec le constructeur

$$I_{Gy} = 2 \cdot \left[\frac{5,5 \cdot 100^3}{12} \right] + \frac{80 \cdot 4,2^3}{12} = 917160,7 \text{ mm}^4$$

Soit : 0,3% d'écart avec le constructeur

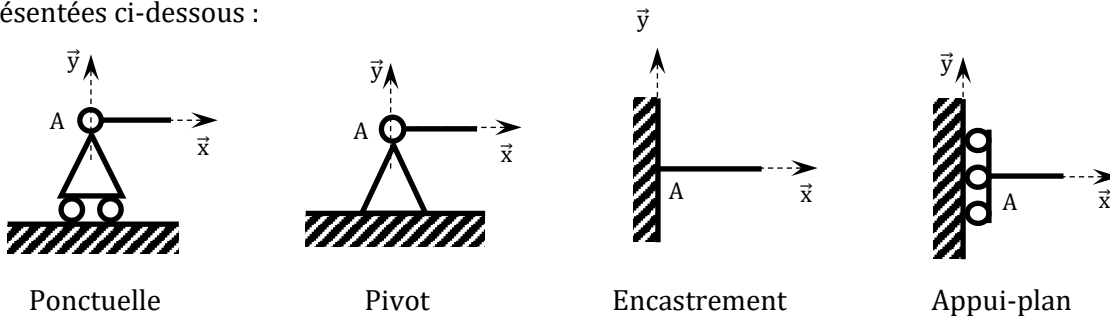
Remarque : L'écart de 8% entre la valeur fournie par le constructeur et la valeur calculée de I_{Gxx} provient de la prise en compte du transport des surfaces et notamment des congés qui sont, dans notre modèle négligés. Dans le calcul de I_{Gyy} la surface n'intervient pas car il n'est pas nécessaire de transporter les différents éléments, ce qui explique un écart beaucoup plus réduit (0,3%).



Calcul de la déformée d'une poutre

★ **Problème N°3 : Conditions aux limites**

Donnez les conditions aux limites en déplacements et rotations pour chacune des liaisons représentées ci-dessous :



CORRECTION

On donne les résultats suivants :

	Ponctuelle		Pivot		Encastrement		Appui-plan	
	R	T	R	T	R	T	R	T
\vec{x}	-	-	0	0	0	0	-	0
\vec{y}	-	0	0	0	0	0	0	-
\vec{z}	-	0	-	0	0	0	0	-

★ **Problème N°4 : Etude d'un plongeur**

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement d'un plongeur (figure N°1) lors de son utilisation.

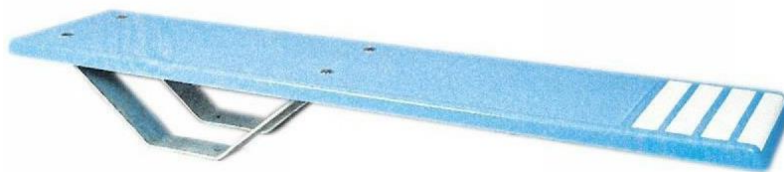


Figure N°1 : Vue d'un plongeur

La modélisation retenue est la suivante (figure N°2) :

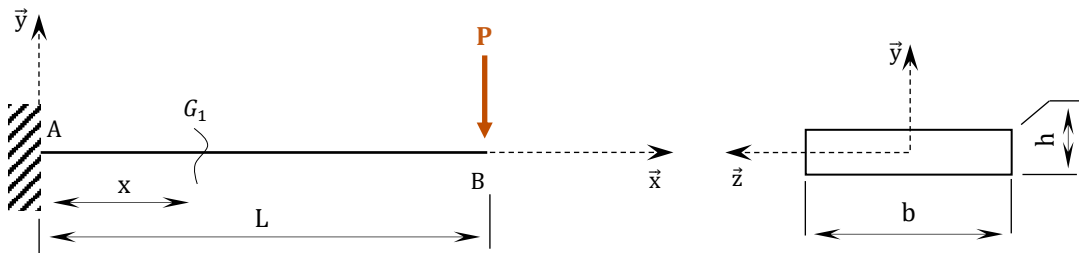


Figure N°2 : Modélisation du plongeur




Avec (les distances sont en [mm] et les efforts en [N]) :

- $L = 1000$ - $b = 350$ - $h = 55$ - $\vec{P} = -800\vec{y}$

Le plongeur est réalisé en bois. On considère pour la suite de l'exercice que le module de Young du matériau est de $E = 12\text{GPa}$.

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Déterminez le torseur de cohésion le long de la poutre]AB[.

 : Rappel du semestre N°2...

Question N°2 : Déterminez l'équation de la déformée du plongeur en fonction de sa géométrie, de son matériau et du chargement qui lui est appliqué.

Question N°3 : Déduire des questions précédentes, l'expression de la raideur du plongeur.

Question N°4 : Donnez le déplacement vertical maximal du plongeur lors de son utilisation.

CORRECTION

Question N°1 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x < L$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R}$$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -P(L - x_1) \end{array} \right\}_{G_1,R}$$

Question N°2 : Le calcul de l'équation de la déformée commence par :

$$\omega'' \cdot E \cdot I_{zz} = Mf_z$$

Avec :

$$Mf_z = -P(L - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega' \cdot E \cdot I_{zz} = -PLx_1 + \frac{Px_1^2}{2} + C_1$$

$$\omega \cdot E \cdot I_{zz} = -\frac{PLx_1^2}{2} + \frac{Px_1^3}{6} + C_1x_1 + C_2$$

Finalement, l'équation de la déformée est :

$$\omega = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \left(\frac{Px_1^3}{6} - \frac{PLx_1^2}{2} + C_1x_1 + C_2 \right)$$

La recherche des constantes d'intégration passe par les conditions aux limites du système :

- Pour $x = 0$:
 - $\omega = 0$
 - $\omega' = 0$

Ainsi : $C_2 = C_1 = 0$

En conclusion :

$$\omega = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \left(\frac{Px_1^3}{6} - \frac{PLx_1^2}{2} \right) = \frac{Px_1^2}{6 \cdot E \cdot I_{zz}} (x_1 - 3L)$$



Question N°3 : La raideur d'un ressort est donnée par la relation :

$$F = k \cdot \Delta L$$

Où F est la force exercée par le ressort, k sa raideur et ΔL la variation de longueur du ressort.

En se plaçant en bout de poutre (pour $x_1 = L$) :

$$\omega = -\frac{PL^3}{3E \cdot I_{zz}}$$

En identifiant le résultat précédent à l'équation donnant la raideur du ressort, il vient :

$$P = -\frac{3E \cdot I_{zz}}{L^3} \cdot \omega$$

Ainsi, la raideur du plongeur vaut :

$$k = \frac{3E \cdot I_{zz}}{L^3}$$

AN :

$$k = 174,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$$

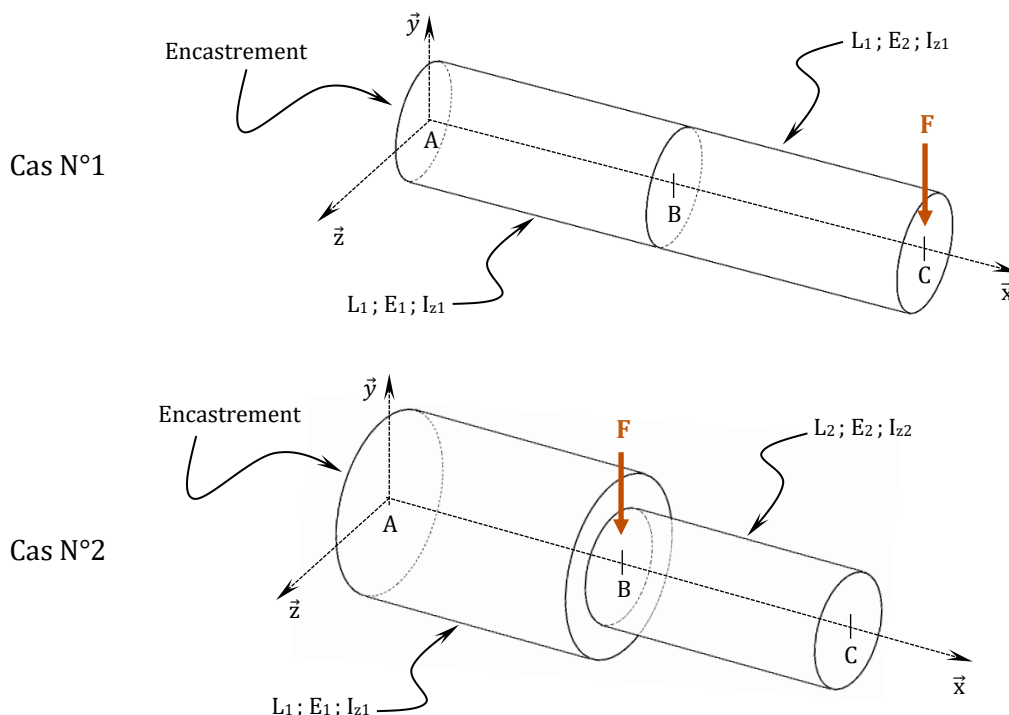
Question N°4 : L'étude de la fonction donnée à la question N°2 sur l'intervalle 0 à L montre que le déplacement maximum est situé à l'abscisse $x_1 = L$. Ainsi, l'application numérique donne :

$$\omega = -\frac{PL^3}{3E \cdot I_{zz}} = -4,58 \text{ mm}$$



Problème N°5 : Etude des conditions aux limites d'une poutre

On considère les deux modélisations suivantes :



Question N°1 : Donnez le(s) torseur(s) de cohésion(s) le long des poutres dans chacun des cas proposés.



- Question N°2 :** Donnez pour chacun des cas proposés, les équations servant au calcul de l'équation de la déformée.
- Question N°3 :** Donnez pour chacun des cas proposés, les conditions aux limites servant à la résolution des équations précédemment posées.
Nota : La résolution complète n'est pas demandée.

CORRECTION

Question N°1 : Cas N°1 :

Etude du torseur de section sur]AC[: $0 < x_1 < 2L_1$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{1,R}} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_{1,R}} = \{\tau_C\}_{G_{1,R}}$$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{1,R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(2L_1 - x_1) \end{pmatrix}_{G_{1,R}}$$

Cas N°2 :

- Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L_1$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{1,R}} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_{1,R}} = \{\tau_B\}_{G_{1,R}}$$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{1,R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L_1 - x_1) \end{pmatrix}_{G_{1,R}}$$

- Etude du torseur de section sur]BC[: $L_1 < x_2 < (L_1 + L_2)$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{2,R}} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_{2,R}} = \{\tau_C\}_{G_{2,R}}$$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_{2,R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G_{2,R}}$$

Remarque : L'étude du torseur des actions intérieures ne tient pas compte des changements de géométrie...

Question N°2 : L'étude des déplacements (flèche) se fait tronçon par tronçon (changement de géométrie, de matériau ou d'actions intérieures).

Cas N°1 :

- Etude de AB (de 0 à L_1) :

$$\omega''_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = -F(2L_1 - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^2}{2} - 2FL_1x_1 + C_1$$

$$\omega_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^3}{6} - FL_1x_1^2 + C_1x_1 + C_2$$

- Etude de BC (de L_1 à $2L_1$) :

$$\omega''_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z1} = -F(2L_1 - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^2}{2} - 2FL_1x_1 + C_3$$

$$\omega_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^3}{6} - FL_1x_1^2 + C_3x_1 + C_4$$



Cas N°2 :

- Etude de AB (de 0 à L₁) :

$$\omega''_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = -F(L_1 - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^2}{2} - FL_1x_1 + C_1$$

$$\omega_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z1} = \frac{Fx_1^3}{6} - \frac{FL_1x_1^2}{2} + C_1x_1 + C_2$$

- Etude de BC (de L₁ à (L₁+ L₂)) :

$$\omega''_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z2} = 0$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z2} = C_3$$

$$\omega_{BC} \cdot E_2 \cdot I_{z2} = C_3x_2 + C_4$$

Question N°3 : Les conditions aux limites donnent :

- Cas N°1 :

- Pour x₁ = 0 :

- $\omega_{AB} = 0$
- $\omega'_{AB} = 0$

- Pour x₁ = L₁ :

- $\omega_{AB} = \omega_{BC}$
- $\omega'_{AB} = \omega'_{BC}$

- Cas N°2 :

- Pour x₁ = 0 :

- $\omega_{AB} = 0$
- $\omega'_{AB} = 0$

- Pour x₁ = L₁ et/ou x₂ = L₁:

- $\omega_{AB} = \omega_{BC}$
- $\omega'_{AB} = \omega'_{BC}$



Problème N°6 : Etude d'un opération de tournage

On se propose dans cet exercice d'étudier le déplacement d'une barre d'alésage (figure N°1) durant une opération de tournage (figure N°2).

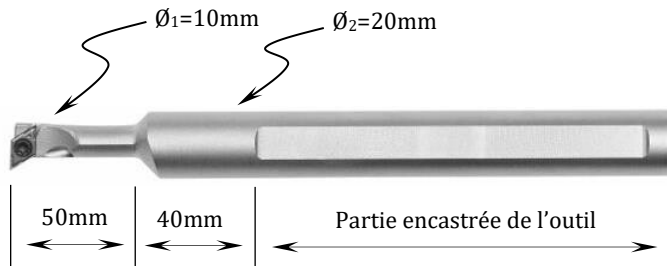


Figure N°1 : Vue de la barre d'alésage étudiée



Figure N°2 : Alésage en tournage

L'outil est réalisé dans un acier rapide supérieur ($E=210\text{GPa}$).

L'effort de coupe enregistré durant l'opération d'usinage est de $F_c=500\text{N}$. On néglige dans cette étude l'effort d'avance et l'effort tangentiel (figure N°2).

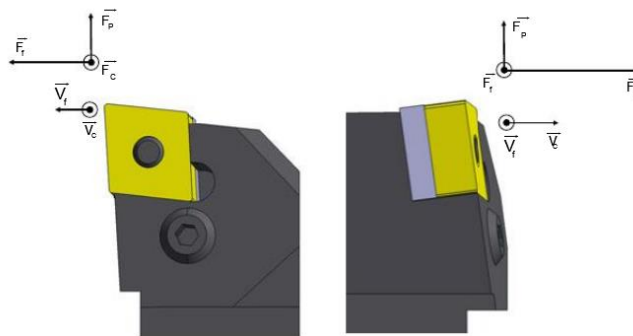


Figure N°1 : Vue des efforts sur un outil de tournage

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Modélisez le problème proposé.

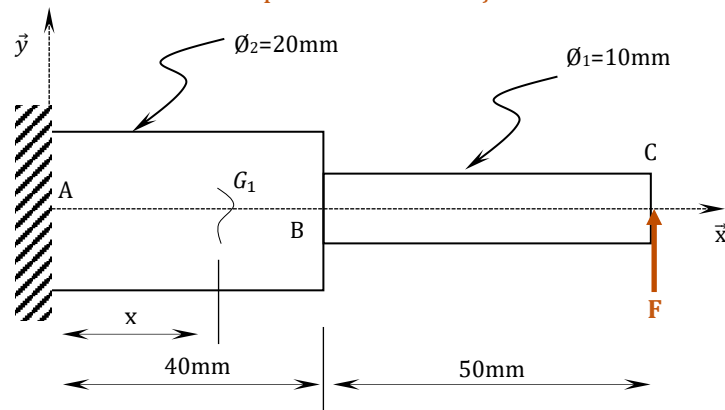
Question N°2 : Déterminez l'équation de la déformée de la barre d'alésage et en déduire son déplacement max lors de l'opération de tournage.

Le diamètre théorique usiné est de $50,000^{+/-0,02}\text{mm}$.

Question N°3 : Donnez le diamètre réellement usiné si nous tenons compte du déplacement vertical de l'outil. Ce nouveau diamètre respecte-t-il la tolérance fixée ?

CORRECTION

Question N°1 : Il est possible de modéliser le problème de la façon suivante :



Question N°2 : L'étude du torseur de section sur]AB[($0 < x_1 < 90\text{mm}$) donne :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_1,R} = \{\tau_C\}_{G_1,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(90 - x_1) \end{Bmatrix}_{G_1,R} \quad [N \cdot \text{Nmm}]$$

L'outil est composé de deux sections différentes (\varnothing_1 et \varnothing_2). L'étude de son déplacement se scinde en deux étapes :

- Etude de AB pour $0 < x < 40\text{mm}$
- Etude de BC pour $40\text{mm} < x < 90\text{mm}$

Ainsi :

- Etude de AB pour $0 < x_1 < 40\text{mm}$:

$$\omega''_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z-AB} = F(90 - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z-AB} = -\frac{F x_1^2}{2} + 90F x_1 + C_1$$

$$\omega_{AB} \cdot E_1 \cdot I_{z-AB} = -\frac{F x_1^3}{6} + 45F x_1^2 + C_1 x_1 + C_2$$

- Etude de BC pour $40\text{mm} < x_1 < 90\text{mm}$:

$$\omega''_{BC} \cdot E_1 \cdot I_{z-BC} = F(90 - x_1)$$

Par intégration successive, il vient :

$$\omega'_{BC} \cdot E_1 \cdot I_{z-BC} = -\frac{F x_1^2}{2} + 90F x_1 + C_3$$

$$\omega_{BC} \cdot E_1 \cdot I_{z-BC} = -\frac{F x_1^3}{6} + 45F x_1^2 + C_3 x_1 + C_4$$

L'étude des conditions aux limites donne :

- Pour $x_1 = 0$ (à l'encastrement) :
 - $\omega_{AB} = 0$
 - $\omega'_{AB} = 0$

Ainsi, $C_1 = C_2 = 0$



- Pour $x_1 = 40\text{mm}$:
 - $\omega_{AB} = \omega_{BC}$
 - $\omega'_{AB} = \omega'_{BC}$

Ainsi :

$$I_{z-AB}(2800F + C_3) = I_{z-BC} \cdot 2800F$$

$$C_3 = \left(\frac{I_{z-BC}}{I_{z-AB}} - 1 \right) \cdot 2800F = -1312,5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

De plus :

$$I_{z-AB} \cdot (61\,333,33F - 52\,500\,000 + C_4)F = -I_{z-BC} \cdot 61\,333,33F$$

$$C_4 = \left(\frac{I_{z-BC}}{I_{z-AB}} - 1 \right) \cdot 61\,333,33F + 52\,500\,000$$

$$C_4 = 2375 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}^3$$

Finalement :

$$\begin{cases} \omega_{AB} = \frac{1}{E_1 \cdot I_{z-AB}} \left(-\frac{Fx_1^3}{6} + 45Fx_1^2 \right) \\ \omega_{BC} = \frac{1}{E_1 \cdot I_{z-BC}} \left(-\frac{Fx_1^3}{6} + 45Fx_1^2 - 1\,312\,500x_1 + 23\,750\,000 \right) \end{cases}$$

Le déplacement max est donné pour $x_1=90\text{mm}$ soit :

$$\boxed{\omega_{BC} = 0,263\text{mm}}$$

Question N°3 : L'erreur sur le diamètre est de 0,001mm. Nous sommes donc dans la tolérance !!!

☆☆ **Problème N°7 : Etude d'un montage de roulement**

On se propose dans cet exercice d'étudier l'angle de rotation des sections d'un arbre maintenu par deux roulements à billes à contacts radiaux. L'ensemble présenté par la figure N°1 & 2 est une liaison pivot de type « 4-2 » dont on cherche à valider le dimensionnement.

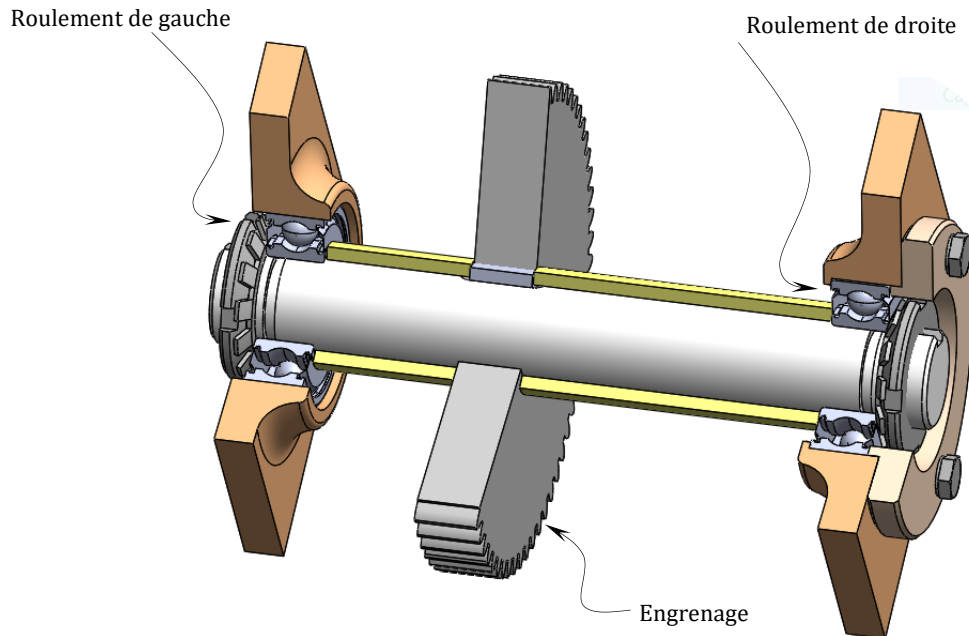


Figure N°1 : Vue du montage de roulement

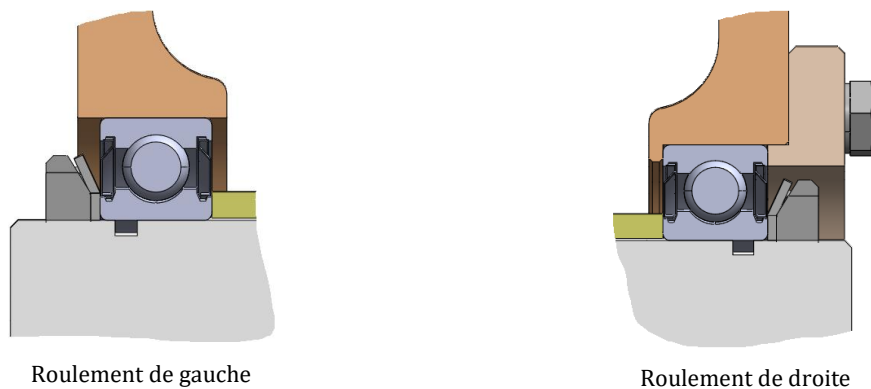


Figure N°2 : Vue de détail du montage de roulement

Pour ce faire, on considère la modélisation suivante (figure N°2) :

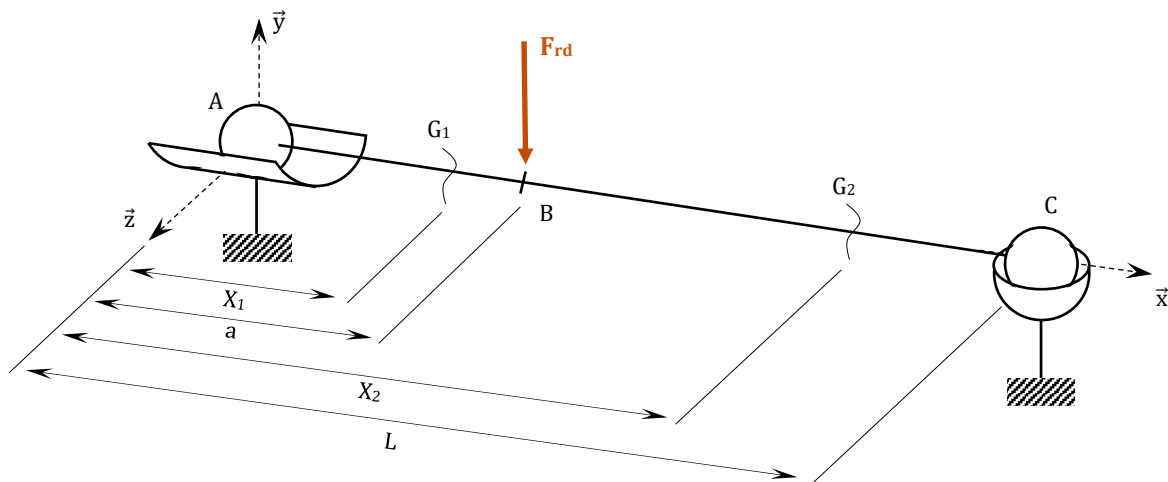


Figure N°2 : Modélisation du montage de roulement

Avec (les distances sont en [mm] et les efforts en [N]) :

- $a = 70$

- $L = 200$

- $\vec{F}_{Rd} = -500\vec{y}$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Déterminez les inconnues de liaison aux points A et C.

: Rappel du semestre N°1...

Question N°2 : Déterminez le(s) torseur(s) de cohésion(s) le long de la poutre]ABC[.

: Rappel du semestre N°2...

Question N°3 : Déterminez l'équation de la déformée de l'arbre en fonction de sa géométrie, de son matériau et du chargement qui lui est appliqué.

Question N°4 : Déduire de la question précédente l'angle de rotation des sections au niveau du roulement de gauche (point A) et de celui de droite (point C) sachant que :

- $E = 210\text{GPa}$
- $\varnothing_{\text{arbre}} = 25\text{mm}$

Question N°5 : Concluez quant à la validité du montage sachant que chaque roulement admet au maximum un angle de rotulage de 15° .

CORRECTION

Question N°1 : Le PFS donne :

- Pour la liaison linéaire annulaire en A :

$$\{\tau_A\}_{A,R} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F - \frac{F \cdot a}{L} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{A,R}$$

- Pour la liaison rotule en C :



$$\{\tau_C\}_{C,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F \cdot a}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{C,R}$$

Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < a$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_1,R} = -\{\tau_A\}_{G_1,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F \cdot a}{L} - F & 0 \\ 0 & x_1 \cdot \left(F - \frac{F \cdot a}{L}\right) \end{pmatrix}_{G_1,R}$$

Etude du torseur de section sur]BC[: $a < x_2 < L$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2,R} = \{\tau_C\}_{G_1,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F \cdot a}{L} & 0 \\ 0 & \frac{F \cdot a}{L} \cdot (L - x_2) \end{pmatrix}_{G_1,R}$$

Question N°3 : On donne la relation suivante :

$$E \cdot I_{gz} \cdot y'' = M_{fz}$$

A ce stade, il convient de déterminer l'équation de la déformée pour chacun des tronçons :

- Section]AB[: $0 < x_1 < a$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_1'' = x_1 \cdot F - \frac{F \cdot a \cdot x_1}{L}$$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_1' = \frac{x_1^2 \cdot F}{2} - \frac{F \cdot a \cdot x_1^2}{2 \cdot L} + C_1$$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_1 = \frac{x_1^3 \cdot F}{6} - \frac{F \cdot a \cdot x_1^3}{6 \cdot L} + C_1 \cdot x_1 + C_2$$

- Section]BC[: $a < x_1 < L$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_2'' = -\frac{F \cdot a \cdot x_2}{L} + F \cdot a$$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_2' = -\frac{F \cdot a \cdot x_2^2}{2 \cdot L} + F \cdot a \cdot x_2 + C_3$$

$$E \cdot I_{gz} \cdot y_2 = -\frac{F \cdot a \cdot x_2^3}{6 \cdot L} + \frac{F \cdot a \cdot x_2^2}{2} + C_3 \cdot x_2 + C_4$$

L'application des conditions aux limites donne :

- Pour $x_1 = 0$; $y_1 = 0$ et $y_1' \neq 0$
- Pour $x_2 = L$; $y_2 = 0$ et $y_2' \neq 0$
- Pour $x_1 = x_2 = a$; $y_1 = y_2$ et $y_1' = y_2'$

La résolution du problème donne :



$$\begin{cases} C_1 = -F \cdot a \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{a}{2} + \frac{L}{3} \right) \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -F \cdot a \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} + \frac{L}{3} \right) \\ C_4 = \frac{F \cdot a^3}{6} \end{cases}$$

Finalemment :

$$y_1 = \frac{1}{E \cdot I_{gz}} \left[\frac{x_1^3 \cdot F}{6} - \frac{F \cdot a \cdot x_1^3}{6 \cdot L} - F \cdot a \cdot x_1 \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{a}{2} + \frac{L}{3} \right) \right]$$

$$y_2 = \frac{1}{E \cdot I_{gz}} \left[-\frac{F \cdot a \cdot x_2^3}{6 \cdot L} + \frac{F \cdot a \cdot x_2^2}{2} - F \cdot a \cdot x_2 \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} + \frac{L}{3} \right) + \frac{F \cdot a^3}{6} \right]$$

Bon là je l'ai posé comme c'est venu, on va l'arranger un peu... :

$$y_1 = \frac{F}{E \cdot I_{gz}} \left[\frac{x_1^3}{6} \cdot \left(1 - \frac{a}{L} \right) - a \cdot x_1 \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{a}{2} + \frac{L}{3} \right) \right]$$

$$y_2 = \frac{F \cdot a}{E \cdot I_{gz}} \left[-\frac{x_2^3}{6 \cdot L} + \frac{x_2^2}{2} - x_2 \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} + \frac{L}{3} \right) + \frac{a^2}{6} \right]$$

Et :

$$y'_1 = \frac{F}{E \cdot I_{gz}} \left[x_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2 \cdot L} \right) - a \cdot \left(\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{a}{2} + \frac{L}{3} \right) \right]$$

$$y'_2 = -\frac{F \cdot a}{E \cdot I_{gz}} \left[\frac{x_2^2}{2 \cdot L} - x_2 + \frac{a^2}{6 \cdot L} + \frac{L}{3} \right]$$

Question N°4 : Le point A est à l'abscisse $x_1=0$, ainsi :

$$y'_1 = -\frac{F \cdot a}{E \cdot I_{gz}} \left[\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{a}{2} + \frac{L}{3} \right]$$

Le point C est à l'abscisse $x_2=L$, ainsi :

$$y'_2 = -\frac{F \cdot a}{E \cdot I_{gz}} \left[\frac{a^2}{6 \cdot L} - \frac{L}{6} \right]$$

L'application numérique donne :

$$y'_1 = -3,11 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$y'_2 = 2,54 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Ainsi, l'angle de rotation des sections donne :

- Pour A

$$\theta_A = -0,018^\circ$$

- Pour B

$$\theta_B = 0,015^\circ$$

Question N°5 : L'angle de rotulage max des roulements (θ_{\max}) est de $0,25^\circ$ (15 minutes d'angle). Le montage est bien dimensionné car :

$$\theta_{\max} > \theta_B \text{ et } \theta_A$$



Sollicitation élémentaire : Flexion

★ **Problème N°9 : Dimensionnement d'une poutre d'agrès**

On se propose dans cet exercice de dimensionner une poutre constituant un ensemble d'agrès de type « barres parallèles » (figure N°1) :



Figure N°1 : Hamilton Sabot sur des barres parallèles
(source : Le Dauphiné libéré.fr)

Pour cela on considère la modélisation de l'une des deux barres (figure N°2) :

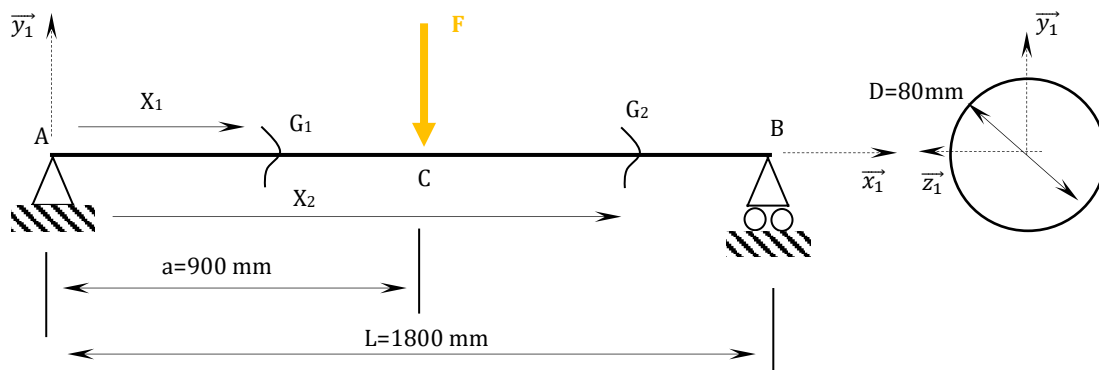


Figure N°2 : Modélisation de l'agrès

De plus :

Matériau utilisé : Bois ($R_e = 30 \text{ MPa}$)

Coefficient de sécurité adopté : 2

Poids d'un gymnaste (noté F) [N] : 1000 N

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Déterminez les inconnues des liaisons aux points A et B.

⚠ : Rappel du semestre N°1...

Question N°2 : Déterminez le torseur de cohésion le long de la poutre [AB].

⚠ : Rappel du semestre N°2...

Question N°3 : Tracez le diagramme des sollicitations. Quel est le point le plus sollicité ?

⚠ : Rappel du semestre N°2...

Question N°4 : Vérifiez le dimensionnement de la poutre (on négligera les effets de l'effort tranchant).

CORRECTION

Question N°1 : Le PFS donne les résultats suivants :

$$\{\tau_A\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} ; \{\tau_B\}_{B,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} \text{ et } \{\tau_C\}_{C,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

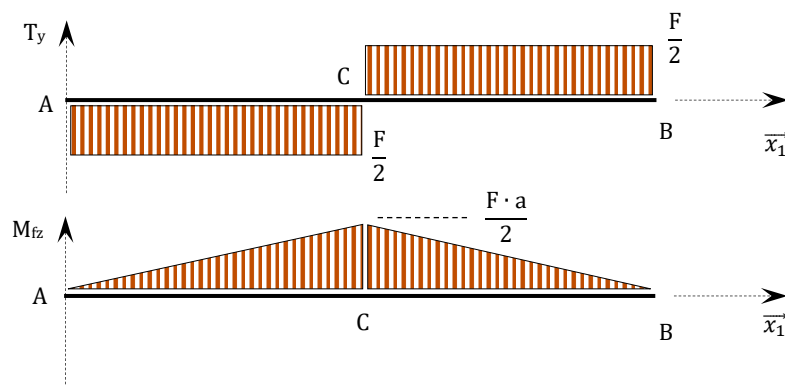
Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AC[: $0 < x_1 < 900\text{mm}$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R_1} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_1,R_1} = -\{\tau_A\}_{G_1,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot x_1 \end{Bmatrix}_{G_1,R_1}$$

Etude du torseur de section sur]CB[: $900\text{mm} < x_2 < 1800\text{mm}$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2,R_1} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2,R_1} = -\{\tau_B\}_{G_2,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot (L - x_2) \end{Bmatrix}_{G_2,R_1}$$

Question N°3 : Les diagrammes des sollicitations donnent :



Le point C est le plus sollicité avec :

$$\begin{cases} T_y = \pm \frac{F}{2} = \pm 500\text{N} \\ M_{fz} = \frac{F \cdot a}{2} = 450 \cdot 10^3\text{Nmm} \end{cases}$$

Question N°3 : On donne la formule suivante pour calculer la contrainte normale liée à une sollicitation en flexion :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\begin{cases} M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = \frac{F \cdot L}{2} \end{cases}$$

De plus,

$$I_{Gz} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

Si on se place au point où la section est la plus sollicitée :

$$y = \mp \frac{D}{2}$$

L'équation devient :

$$\sigma_{xx} = \frac{16 \cdot F \cdot L}{\pi \cdot D^3}$$

L'application numérique donne :

$$\sigma_{xx} = 9 \text{MPa}$$

La poutre est donc bien dimensionnée car :

$$\sigma_{xx} < \frac{Re}{s}$$

★★ Problème N°10 : Optimisation de la forme d'un gousset

Un gousset est une pièce de charpente métallique permettant de renforcer une liaison encastrement entre deux poutres (figure N°1). On se propose au travers de cet exercice de justifier l'emploi d'une forme « triangulaire » pour sa réalisation.

On modélise ici le gousset sous la forme d'une poutre de longueur « L » encastree à l'une de ses extrémités.

Une première approximation amène à considérer une charge ponctuelle et verticale notée « F » appliquée à l'autre extrémité de cette poutre. Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

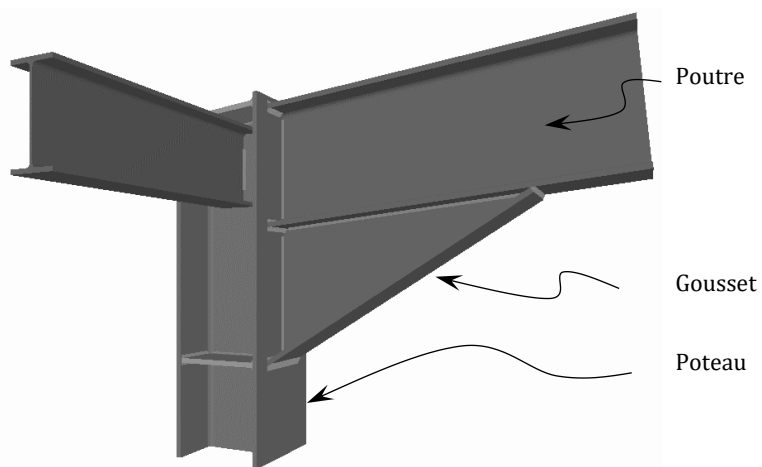


Figure N°1 : Exemple d'une liaison encastrement en charpente métallique
(source : <http://produits.cype.fr>)

Question N°1 : Déterminez le torseur de section le long de la poutre]AB[.

: Rappel du semestre N°2...

Question N°2 : Déterminez l'équation (eq1) donnant la hauteur du gousset (notée « h₁ » en [mm]) suivant \vec{y} en fonction x_1 . Pour ce faire :

- On négligera les effets de l'effort tranchant.
- Le matériau utilisé dispose d'une limite d'élasticité notée R_e .
- Le coefficient de sécurité est égal à s .
- La largeur du gousset (dimension suivant \vec{z}) est considérée comme constante et égale à b .

On se propose à présent de remplacer la charge ponctuelle précédente par une charge linéairement répartie (noté « P ») le long de la poutre et de résultante verticale. Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°3 : Déterminez le nouveau torseur de section le long de la poutre]AB[.

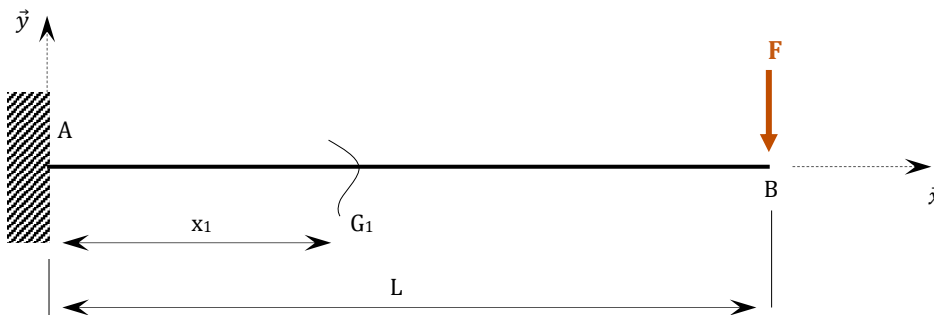
: Rappel du semestre N°2...



- Question N°4 :** Déterminez l'équation (eq2) donnant la hauteur du gousset (notée « h_2 » en [mm]) suivant \vec{y} en fonction x_2 . Pour ce faire, vous prendrez les mêmes conditions qu'à la question N°2.
- Question N°5 :** Calculez la hauteur du gousset au point le plus sollicité (point A) pour les deux modélisations proposées avec $F=10\text{kN}$, $P=20\text{N/mm}$, $b=10\text{mm}$, $R_e=235\text{MPa}$, $s=2$ et $L=1\text{m}$.
- Question N°6 :** Commentez les deux équations obtenues par les deux modélisations.

CORRECTION

Question N°1 : Soit la modélisation retenue pour l'étude du gousset :



Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L - x_1) \end{Bmatrix}_{G_1,R}$$

Question N°2 : On donne la formule suivante pour calculer la contrainte normale liée à une sollicitation en flexion :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\begin{cases} M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -F(L - x_1) \end{cases}$$

De plus,

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h_{(x_1)}^3}{12}$$

Si on se place au point où la section est la plus sollicitée (point le plus éloigné de l'axe neutre $\sigma_{xx} = 0$) :

$$y = \mp \frac{h_{(x_1)}}{2}$$

L'équation devient :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{F(L - x_1) \cdot 6}{b \cdot h_{(x_1)}^2}$$

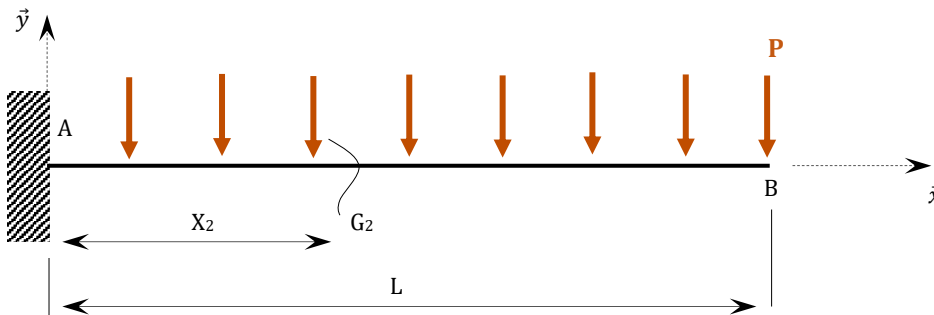
Finalement :

$$h_{(x_1)} = \sqrt{\frac{F(L - x_1) \cdot 6}{R_e \cdot b}} \quad (\text{eq 1})$$

On remarque que l'équation obtenue est du type :

$$y = \sqrt{-ax + b}$$

Question N°3 : Soit la modélisation retenue pour l'étude du gousset :



$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2,R} = \{\tau_B\}_{G_2,R} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -P(L-x_2) & 0 \\ 0 & \frac{P(L-x_2)^2}{2} \end{array} \right\}_{G_2,R}$$

Question N°4 : De la même manière que précédemment :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -\frac{P(L-x_2)^2}{2} \end{array} \right.$$

L'équation devient :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{P(L-x_2)^2 \cdot 3}{b \cdot h_{(x_2)}^2}$$

Finalement :

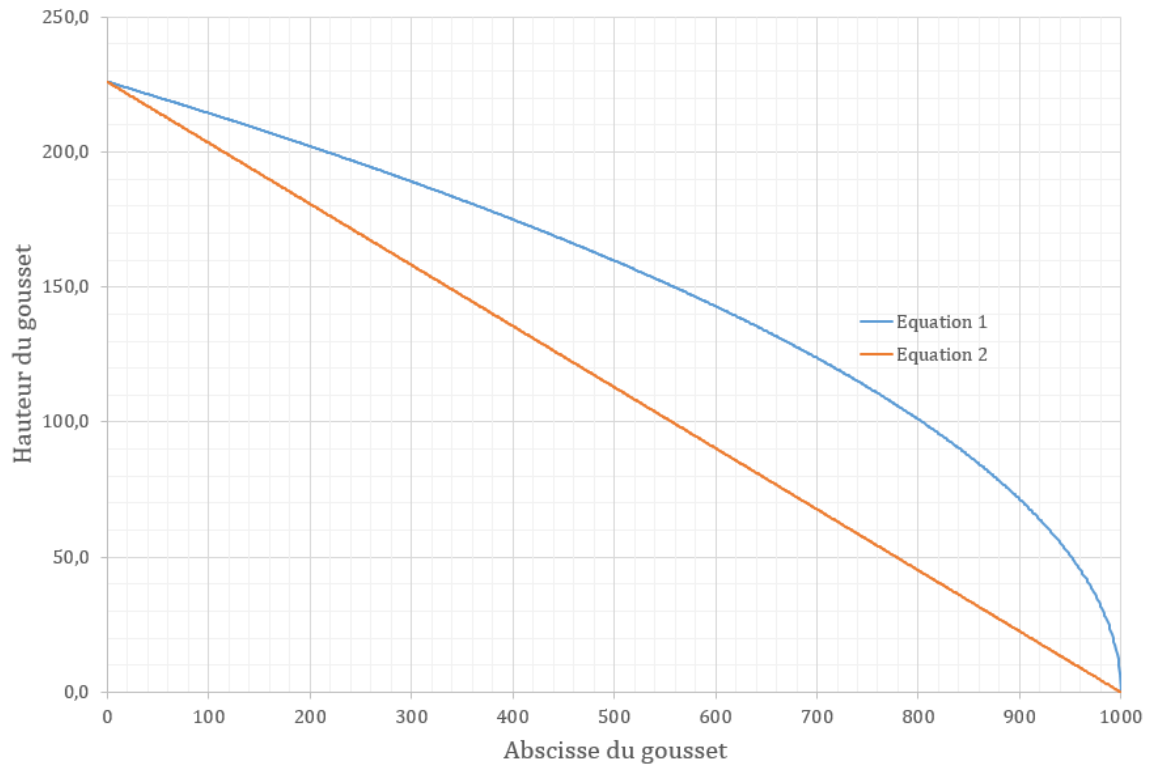
$$h_{(x_2)} = \sqrt{\frac{P(L-x_2)^2 \cdot 3}{R_e \cdot b}} \quad (\text{eq 2})$$

On remarque que l'équation obtenue est une droite du type :

$$y = -ax + b$$

Question N°5 & 6 : Le diagramme suivant donne l'allure de la hauteur du gousset pour les deux cas étudiés. Les paramètres sont pris pour $F=10\text{kN}$, $P=20\text{N/mm}$, $b=10\text{mm}$, $R_e=235\text{MPa}$, $s=2$ et $L=1\text{m}$.

On retrouve bien les formes triangulaires annoncées et utilisées en charpente métallique (OUF !!!). Même si le deuxième cas est plus proche de la réalité (on pourrait encore affiner le modèle en passant sur un chargement triangulaire) on remarque que la tendance est là. Ici, notre calcul permet d'avoir la peau de notre gousset iso-contraint -> début de l'optimisation !!!



Hauteur du gousset en fonction de l'abscisse et du chargement considéré

☆☆ Problème N°11 : Etude des fourches d'un chariot élévateur

On se propose dans cet exercice d'étudier le dimensionnement des fourches d'un chariot élévateur dans le cas le plus défavorable de son chargement.

Pour ce faire, on considère la modélisation présentée au travers de la figure N°2.

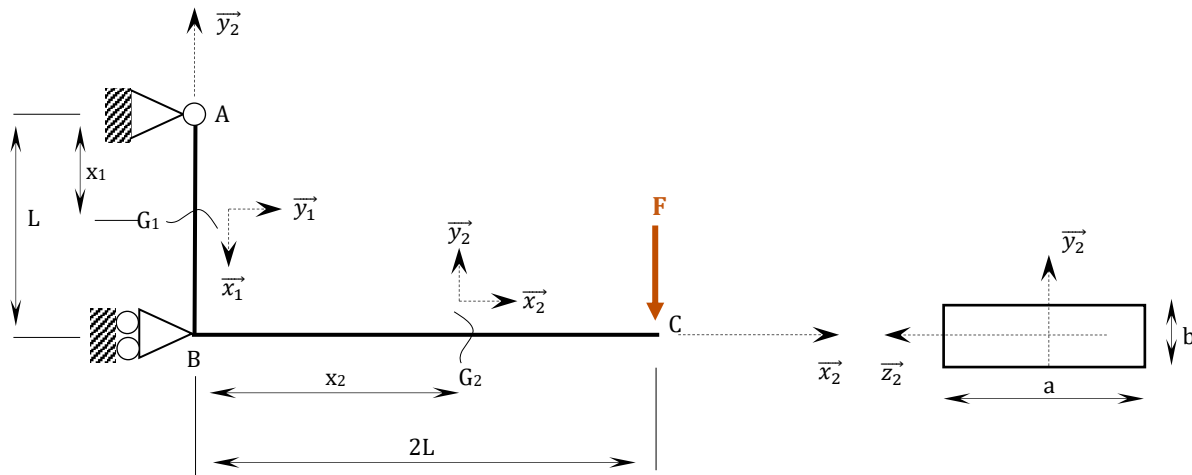


Figure N°2 : Modélisation de l'une des fourches

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez les inconnues des liaisons aux points A et B.
 ⚠ : Rappel du semestre N°1...
- Question N°2 :** Déterminez le torseur de cohésion le long de la poutre]ABC[.
 ⚠ : Rappel du semestre N°2...
- Question N°3 :** Tracez le diagramme des sollicitations. Quel est le point le plus sollicité ?
 ⚠ : Rappel du semestre N°2...
- Question N°4 :** Calculez la contrainte de flexion au point le plus sollicité pour $F=10000\text{N}$, $L=600\text{mm}$, $a=120\text{mm}$ et $b=40\text{mm}$ (on négligera les effets de l'effort normal et tranchant).
- Question N°5 :** Lequel des matériaux suivants pourrait convenir à la fabrication de la fourche pour avoir un coefficient de sécurité d'au moins 1,2 ?
- S235 : $R_e = 235\text{MPa}$
 - S350 : $R_e = 350\text{MPa}$
 - S500 : $R_e = 500\text{MPa}$
- Question N°6 :** Quelle charge entrainerait le dépassement de la limite d'élasticité de la fourche ?

CORRECTION

Question N°1 : Le PFS donne les résultats suivants :

$$\{\tau_A\}_{A,R_2} = \begin{Bmatrix} -2 \cdot F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_2} ; \{\tau_B\}_{B,R_2} = \begin{Bmatrix} 2 \cdot F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_2}$$



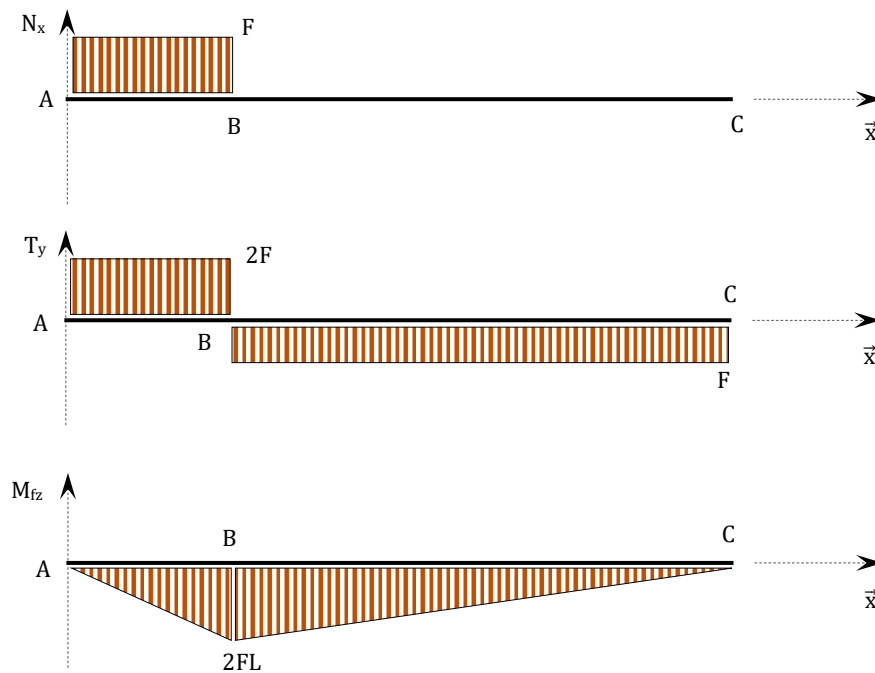
Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_A\}_{G_1, R_1} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 2 \cdot F & 0 \\ 0 & -2 \cdot F \cdot x_1 \end{Bmatrix}_{G_1, R_1}$$

Etude du torseur de section sur]BC[: $0 < x_2 < 2L$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2, R_2} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2, R_2} = \{\tau_C\}_{G_2, R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot (2L - x_2) \end{Bmatrix}_{G_2, R_2}$$

Question N°3 : Les diagrammes des sollicitations sont :



Le point $B \in AB$ est le plus sollicité.

Question N°4 : On donne la formule suivante pour calculer la contrainte normale liée à une sollicitation en flexion :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\begin{cases} M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -2 \cdot F \cdot L \end{cases}$$

De plus,

$$I_{Gz} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

On se place au point où la section est la plus sollicitée pour

$$y = \mp \frac{b}{2}$$

Il vient :

$$\sigma_{\text{flexion}} = \frac{12 \cdot F \cdot L}{a \cdot b^2}$$

L'application numérique donne :

$$\sigma_{\text{flexion}} = 375 \text{ MPa}$$



Question N°5 : Il convient d'avoir :

$$\frac{R_e}{S} \geq \sigma_{\text{flexion}}$$

Ainsi, le S500 conviendrait parfaitement...

Question N°6 : La charge entraînant le dépassement de la limite élastique serait :

$$F = \frac{R_e \cdot a \cdot b^2}{12 \cdot L}$$

L'application numérique donne :

$$F = 13,3 \text{ kN}$$

★★ **Problème N°12 : Etude d'un bras de robot**

On se propose dans cet exercice d'étudier les contraintes induites dans le bras supérieur d'un robot industriel de peinture (figure N°1) utilisé sur les lignes de production d'autobus et d'autocars. Contrairement à ceux utilisés dans l'automobile ces robots ont la particularité d'être montés sur des plateformes à mouvements linéaires pour se déplacer le long du véhicule.

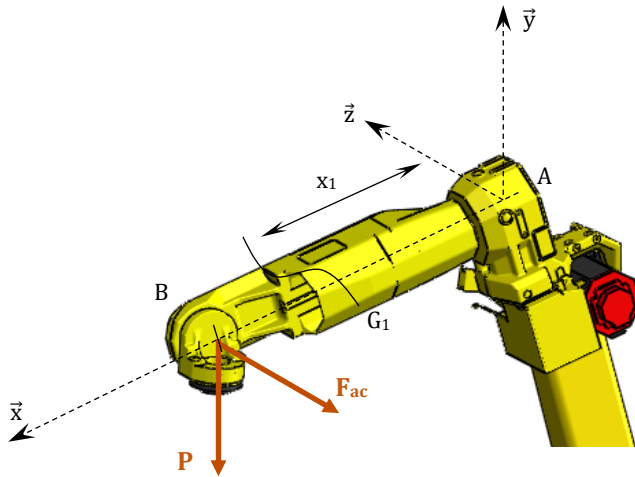


Figure N°1 : Vue du bras et de son système axe

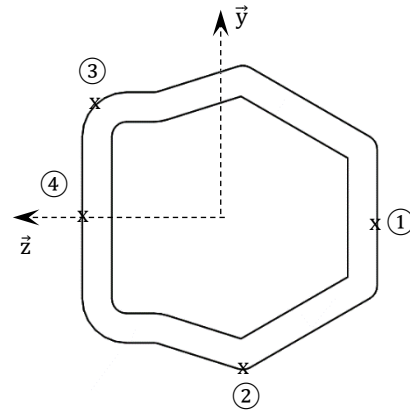


Figure N°2 : Vue de la section du bras

La modélisation retenue est celle d'une poutre de longueur $L=1100\text{mm}$ à section constante (figure N°2) encastree en A et libre en B se déplaçant de manière rectiligne suivant \vec{z} . Le passage de la position arrêtée à celle où le robot atteint sa vitesse nominale de $15\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ se fait en 1 seconde. La masse totale embarquée (bras + outil) est considérée comme ponctuelle. Elle se traduit par un effort ponctuel en B et valant $\vec{P} = -5000\vec{y}$ (effort exprimé en [N]).

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Déterminez l'intensité de F_{ac} en fonction des données du problème.

Question N°2 : Déterminez le torseur de cohésion le long de la poutre]AB[.

: Rappel du semestre N°2...

Question N°3 : Tracez le diagramme des sollicitations et en déduire le point le plus sollicité.

: Rappel du semestre N°2...

Question N°4 : Calculez pour le point le plus sollicité la contrainte de flexion en ①(-114 ;0), ②(-14;-103), ③(60 ;85) et ④(66;0) dans le plan ($\vec{z}; \vec{y}$).

Nota :

- $I_{Gz} = 5062,71\text{cm}^4$ et $I_{Gy} = 5765,28\text{cm}^4$.
- Les distances sont en mm.

Question N°5 : Rechercher la position de l'axe neutre et en déduire le point le plus sollicité dans la section.



CORRECTION

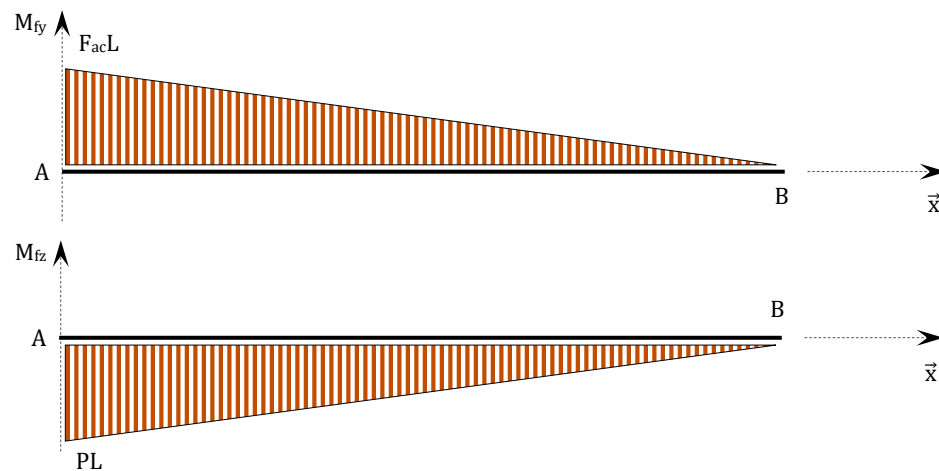
Question N°1 : Si le mouvement se fait suivant \vec{z} , l'application du PFD en résultante donne :

$$F_{ac} = -500 \cdot \frac{15 \cdot 1000}{3600 \cdot 1} = -2083\text{N}$$

Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L$

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & F_{ac}(L - x_1) \\ -F_{ac} & -P(L - x_1) \end{Bmatrix}_{G_1,R}$$

Question N°3 : Le tracé des diagrammes donne (on ne considère ici que les moments fléchissants) :



Le point A est le plus sollicité.

Question N°4 : On donne la formule suivante :

$$\sigma_{flexion} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\begin{cases} M_{fy} = F_{ac} \cdot L \\ M_{fz} = -P \cdot L \end{cases}$$

L'application numérique donne :

$$\sigma_{flexion} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ainsi :

$$\sigma_{flexion} = 0,11 \cdot y + 0,040 \cdot z$$

Point ($\vec{z}; \vec{y}$)	① (-114 ;0)	② (-14;-103)	③ (60 ;85)	④ (66;0)
$\sigma_{flexion}$ [MPa]	-4,56	-11,89	11,75	2,64

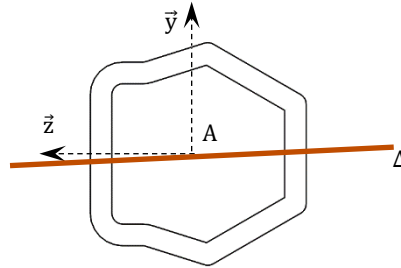


Question N°5 : L'axe neutre Δ est donné pour :

$$\sigma_{\text{normale}} = \sigma_{\text{flexion}} = 0$$

Ainsi :

$$y = -0,36 \cdot z$$



★★ **Problème N°13 : Etude d'une poutre de charpente**

On se propose dans cet exercice de dimensionner la structure d'un hangar (figure N°1) servant au stockage de matériel agricole pour une ferme située sur le plateau Ardéchois (800m d'altitude et vive l'Ardèche !!!). Cette structure se compose de 8 pannes (type IPN-120) également réparties et espacées de 1,2 mètres. Chaque panne est en appui sur deux arbalétriers (une travée) distant l'un de l'autre de 2 mètres. Dans la suite de l'étude, on négligera le poids de la couverture type « bacacier » devant la charge liée à la neige.



Figure N°1 : Vue d'une charpente métallique (source : <http://marconnet-sarl.fr>)

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez la surface de neige projetée au sol (noté S) que doit soutenir une panne sachant que le toit fait un angle de 12° par rapport à l'horizontale. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de vérifier le dimensionnement des deux pannes situées aux extrémités de la toiture ?
- Question N°2 :** Déterminez à l'aide de la figure N°5, le cas de chargement maximal possible sur l'ensemble de la couverture d'une travée.
- Question N°3 :** Choisir et déterminer à l'aide de la figure N°2, le moment fléchissant maximal (noté M_{fz1}) atteint sur chaque panne.

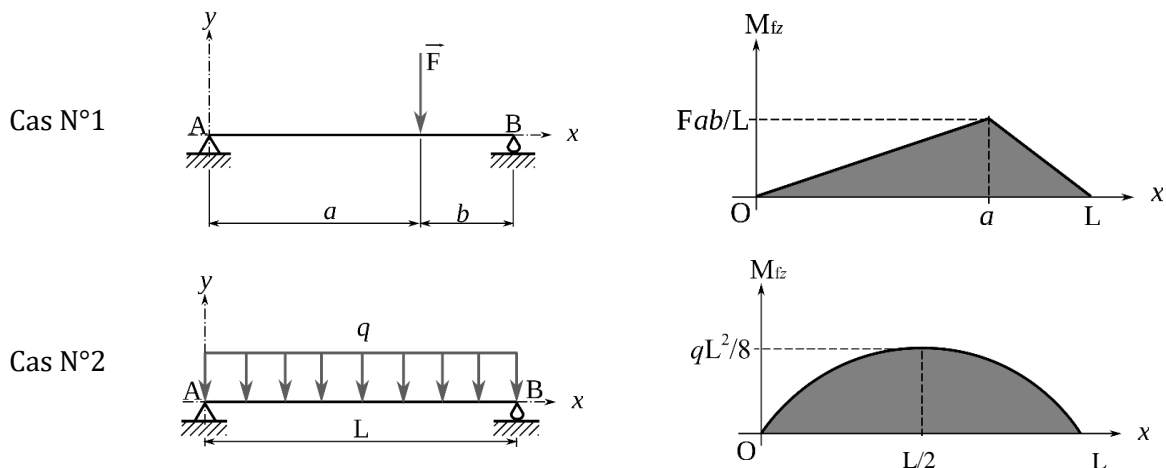


Figure N°2 : Extrait d'un formulaire de résistance des matériaux (source : fr.wikibooks.org)



On modélise l'action de la neige sur une panne de la manière suivante (figure N°3) :

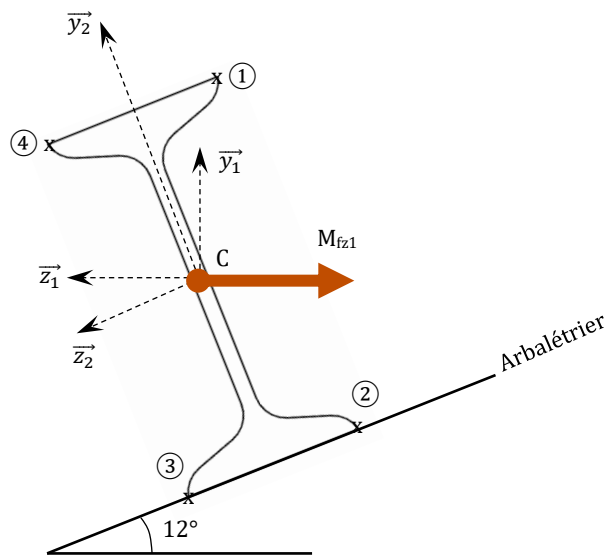


Figure N°3 : Modélisation du chargement d'une panne au point le plus sollicité

Question N°4 : Calculez la contrainte de flexion aux points ① à ④ et validez le dimensionnement d'une panne.

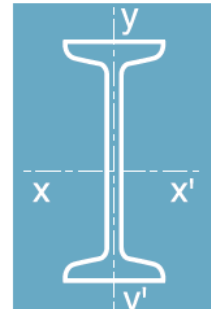


Poutrelles

POUTRELLES IPN
(poutrelles I normales) acier S275JR

CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

Profil	Moments d'inertie	
	I _x (cm ⁴)	I _y (cm ⁴)
80	77,80	6,29
100	171,00	12,20
120	328,00	21,50
140	573,00	35,20
160	935,00	54,70
180	1 450,00	81,30



CARACTÉRISTIQUES DIMENSIONNELLES

Profil	h (mm)	b (mm)	a (mm)	h ₁ (mm)
80	80	42	3,9	59
100	100	50	4,5	75
120	120	58	5,1	92
140	140	66	5,7	109
160	160	74	6,3	125
180	180	82	6,9	142

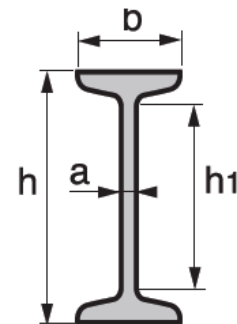


Figure N°4 : Extrait d'un catalogue constructeur (source : <https://www.edoc.descours-cabaud.com>)



Extrait du formulaire proposé par la TI C3305V3

La charge de neige sur la toiture (charge verticale) se calcule par la formule suivante :

$$S_{k-1} = 1,25 \cdot \mu_1 \cdot (S_{k,0} + \Delta S_i)$$

Ou pour une charge exceptionnelle :

$$S_{k-2} = 1,25 \cdot \mu_1 \cdot S_{Ad}$$

Avec :

S_{k-1} [kN/m²] : Charge de neige verticale agissant sur la toiture.

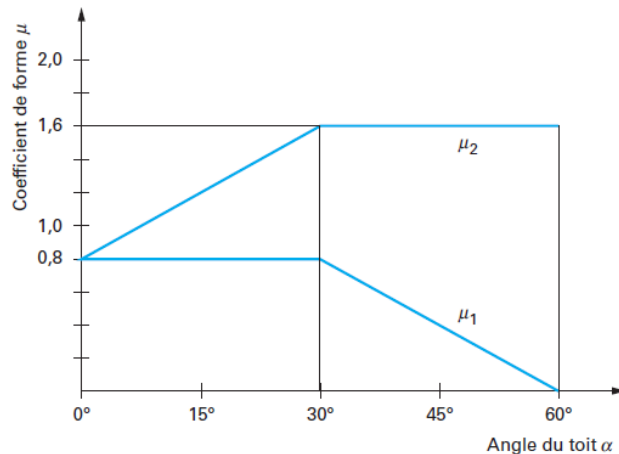
S_{k-2} [kN/m²] : Charge de neige verticale agissant sur la toiture pour un cas exceptionnel.

$S_{k,0}$ [kN/m²] : Charge de neige au sol pour une altitude <200m.

ΔS_i [kN/m²] : Loi de variation de la charge de neige au sol en fonction de l'altitude.

S_{Ad} [kN/m²] : Charge de neige exceptionnelle.

μ_1 [SU] : Coefficient de forme



α (angle du toit avec l'horizontale)	$0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$	$30^\circ < \alpha < 60^\circ$	$\alpha \geq 60^\circ$
μ_1	0,8	$0,8(60 - \alpha)/30$	0,0
μ_2	$0,8 + 0,8 \alpha/30$	1,6	—

Valeurs des coefficients de forme μ_i

Tableau 1 – Classement des départements					
Départements	Région(s)	Départements	Région(s)	Départements	Région(s)
01 Ain	A2 / C2	32 Gers	A2	64 Pyrénées-Atlantiques	A2
02 Aisne	A1 / C1	33 Gironde	A2	65 Hautes-Pyrénées	A2
03 Allier	A2	34 Hérault	B2 / C2	66 Pyrénées-Orientales	C2 / D
04 Alpes-de-Haute-Provence	C1	35 Ille-et-Vilaine	A1	67 Bas-Rhin	B1 / C1
05 Hautes-Alpes	C1	36 Indre	A1	68 Haut-Rhin	C1
06 Alpes-Maritimes	A2 / C1	37 Indre-et-Loire	A1	69 Rhône	A2
07 Ardèche	C2	38 Isère	C2	70 Haute-Saône	B1 / C1

Tableau 3 – Valeur caractéristique et charge exceptionnelle par région									
Régions	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D	E	
Valeur caractéristique ($s_{k,0}$) de la charge de neige sur le sol à une altitude inférieure à 200 m (en kN/m ²)	0,45	0,45	0,55	0,55	0,65	0,65	0,90	1,40	
Valeur de calcul (s_{Ad}) de la charge exceptionnelle de neige sur le sol (en kN/m ²)	—	1,00	1,00	1,35	—	1,35	1,80	—	

Tableau 4 – Lois de variation de la valeur caractéristique s_k en fonction de l'altitude A et de la région		
Altitude A	Régions A, B, C, D Loi de variation : Δs_1	Région E Loi de variation : Δs_2
de 200 à 500 m	$A/1\ 000 - 0,20$	$1,5 A/1\ 000 - 0,30$
de 500 à 1 000 m	$1,5 A/1\ 000 - 0,45$	$3,5 A/1\ 000 - 1,30$
de 1 000 à 2 000 m	$3,5 A/1\ 000 - 2,45$	$7 A/1\ 000 - 4,80$

Figure N°5 : Extrait d'une notice de calcul permettant la détermination d'une charge de neige (source : Techniques de l'ingénieur N°C3305V3)



CORRECTION

Question N°1 : La surface de neige que doit reprendre une panne est :

$$S = 1,2 \cdot 2 \cdot \cos 12 = 2,4 \text{ m}^2$$

Il n'est pas nécessaire de considérer les pannes situées aux extrémités de la toiture car elles supportent une surface de neige deux fois moins importante que les autres.

Question N°2 & 3 : Le hangar se trouve en Ardèche (vive l'Ardèche) à une altitude de 800m. D'après la notice de calcul :

- Zone C2
- $S_{k,0} = 0,65 \text{ kN/m}^2$
- $\Delta S_i = 0,75 \text{ kN/m}^2$
- $S_{Ad} = 1,35 \text{ kN/m}^2$
- $\mu_1 = 0,8$

Ainsi, la charge de neige au sol est de :

$$S_{k-1} = 1,4 \text{ kN/m}^2$$

$$S_{k-2} = 1,35 \text{ kN/m}^2$$

C'est donc le cas 1 qui est retenu pour le dimensionnement (pas de cas exceptionnel ici). La force (notée F) induite sur une panne est donnée par :

$$F = S_{k-1} \cdot S = 3,4 \text{ kN}$$

Toutefois, cette charge est répartie sur une panne qui mesure 2 mètres de long. Ainsi la charge linéique (noté q) est donnée par :

$$q = \frac{F}{L} = \frac{3,4}{2} = 1,7 \text{ kNm}^{-1}$$

On retient donc le cas N°2 du formulaire. Finalement le point le plus sollicité de la poutre se trouve au centre de la travée (en L/2) :

$$M_{fz1} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{1,7 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{8} = 850 \text{ Nm}$$

Attention, ici on néglige les effets de l'effort tranchant devant ceux du moment fléchissant.



Question N°4 : D'après les questions précédentes :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -850 \end{Bmatrix}_{C,R_1} \quad [\text{N}; \text{Nm}]$$

Ainsi :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{C,R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -850 \cdot \sin 12 \\ 0 & -850 \cdot \cos 12 \end{Bmatrix}_{C,R_2} \quad [\text{N}; \text{Nm}]$$

Finalement

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{C,R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -176,7 \\ 0 & -831,4,9 \end{Bmatrix}_{C,R_2} \quad [\text{N}; \text{Nm}]$$

On donne :

$$\sigma_{\text{flexion}} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ainsi :

$$\sigma_{\text{flexion}} = -0,82 \cdot z + 0,25 \cdot y$$

Point $(\vec{z}_2; \vec{y}_2)$	① (-29 ;60)	② (-29;-60)	③ (29 ;-60)	④ (29;60)
σ_{flexion} [MPa]	28,8	8,8	-28,8	-8,8

La poutre est donc correctement dimensionnée car nous avons un acier de type S275 (Re=275MPa minimum). Ainsi :

$$\frac{R_e}{s} > \pm 28,8 \text{ MPa}$$

On peut conclure quant au coefficient de sécurité de cette structure :

$$s = 9,5$$

Attention aux risques sismiques...

On pourrait refaire les calculs afin de savoir si un IPE plus petit pourrait convenir.



Sollicitation élémentaire : Torsion

★ **Problème N°14 : Etude d'une croix de serrage**

On se propose ici de valider le dimensionnement d'une croix. La majorité du temps, cet outil permet le serrage/desserrage des roues de voiture. Plus rarement, son caractère dissuasif permet de régler les différents pouvant survenir entre automobilistes.



Figure N°1 : Vue d'une croix de serrage

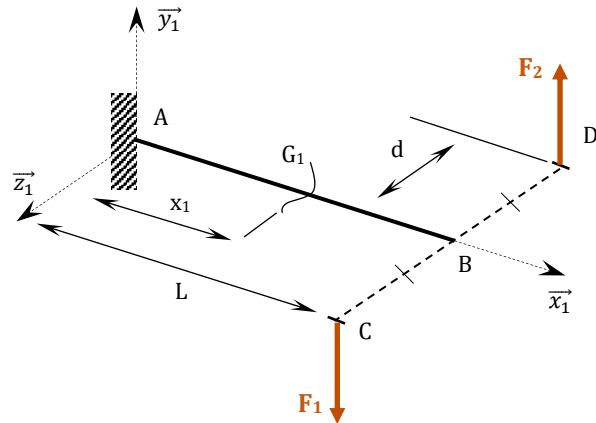


Figure N°2 : Modélisation de la croix de serrage

On donne (les distances sont en [mm] et les efforts en [N]) :

- $\overline{AB} = L \overline{x_1} = 200 \overline{x_1}$
- $\overline{BC} = d \overline{z_1} = 200 \overline{z_1}$
- $\overline{BD} = -d \overline{z_1} = -200 \overline{z_1}$
- $\overline{F_1} = -800 \overline{y_1}$
- $\overline{F_2} = 800 \overline{y_1}$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez le torseur de section le long de la poutre]AB[.
- ⚠ : Rappel du semestre N°2...
- Question N°2 :** Tracez le diagramme des sollicitations et en déduire le point le plus sollicité.
- ⚠ : Rappel du semestre N°2...
- Question N°3 :** Validez le dimensionnement de la croix sachant qu'elle est réalisée dans une barre circulaire de diamètre 16mm (noté « D ») dont la limite d'élasticité en cisaillement est de $R_p = 400\text{MPa}$.
- Question N°4 :** Tracez la répartition des contraintes au sein de l'une des sections de la poutre]AB[.
- Question N°5 :** Calculez l'angle de distorsion des génératrices de la poutre]AB[sachant que $G = 81\text{GPa}$.
- Question N°6 :** Déterminez l'angle de rotation de la section en B par rapport à celle en A.
- Question N°7 :** Déduire de la question précédente la raideur de la croix.



CORRECTION

Question N°1 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L$

$$\begin{aligned} \{\tau_{\text{int}}\}_{G_1, R_1} &= \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_1, R_1} = \{\tau_C\}_{G_1, R_1} + \{\tau_D\}_{G_1, R_1} \\ \{\tau_{\text{int}}\}_{G_1, R_1} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & d(F_1 + F_2) \\ F_2 - F_1 & 0 \\ 0 & (L - x_1) \cdot (F_2 - F_1) \end{array} \right\}_{G_1, R_1} \end{aligned}$$

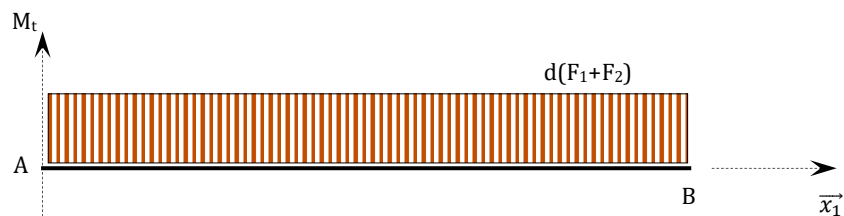
Dans notre cas :

$$F_1 = F_2$$

Ainsi :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1, R_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & d(F_1 + F_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G_1, R_1}$$

Question N°2 :



Les sections de la poutre sont toutes sollicitées de la même manière.

Question N°3 : Il convient à ce stade de vérifier si la contrainte tangentielle maximale dans la barre est bien inférieure à la limite d'élasticité en cisaillement. Ainsi :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{M_t \cdot R}{I_G}$$

Avec :

$$R = \frac{D}{2}$$

$$I_G = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

$$M_t = d(F_1 + F_2)$$

Finalement :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{d(F_1 + F_2) \cdot 16}{\pi \cdot D^3}$$

L'application numérique donne :

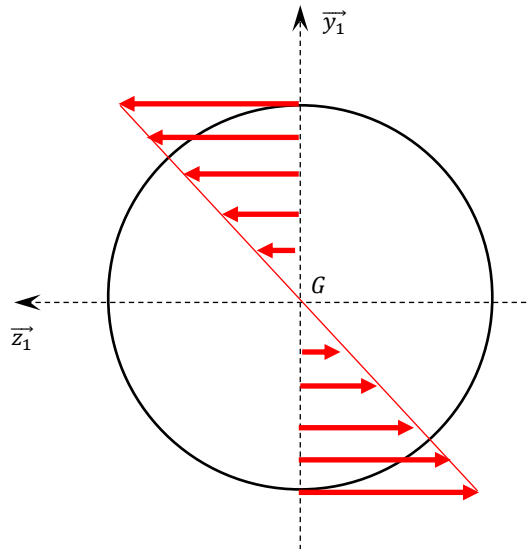
$$\tau_{\text{torsion-max}} = 398 \text{ MPa}$$

On remarque que la croix est correctement dimensionnée car :

$$\tau_{\text{torsion-max}} < R_p$$



Question N°4 :



Question N°5 : On donne :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = G \cdot \gamma$$

Ainsi :

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{torsion-max}}}{G}$$

L'application numérique donne :

$$\gamma = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Question N°6 : On donne :

$$\theta_{(x)} = \frac{M_{t(x)} \cdot x}{G \cdot I_G}$$

Ainsi :

$$\theta_{(L)} = \frac{d(F_1 + F_2) \cdot L \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot D^4}$$

L'application numérique donne :

$$\theta_{(L)} = 0,12 \text{ rad} = 7^\circ$$

Question N°7 : On donne :

$$C = k \cdot \theta$$

Ainsi :

$$k = \frac{d(F_1 + F_2)}{\theta_{(L)}} = 2666666,7 \text{ Nm. rad}^{-1}$$



Problème N°15 : Dimensionnement d'un joint de cardan

A la fin de la seconde guerre mondiale, les pays d'Europe de l'Ouest soutenus par les investissements américains ont engagé une politique forte visant à développer l'agriculture. Les tracteurs alors utilisés sont devenus de plus en plus puissants afin d'alimenter de manière efficace les différents outils servant à l'exploitation des surfaces cultivables (fendeuse de bûches, gyrobroyeur, ...). L'alimentation de ces outils en énergie mécanique est encore aujourd'hui réalisée à l'aide d'un joint de cardan (figure N°1). Il se place entre l'arbre récepteur de l'outil et la prise de force (PDF) du tracteur. Cette dernière est quant à elle directement reliée au moteur thermique du tracteur.



Figure N°1 : Vue d'un joint de cardan

On se propose ici de dimensionner un joint de cardan pour un tracteur de 60CV (rappel : 1CV = 736W) dont la prise de force tourne à 540tr.min⁻¹. Cet arbre de transmission doit répondre aux contraintes suivantes :

Limite d'élasticité en torsion du matériau [MPa] :	$\tau_e = 200$
Coefficient de POISSON [SU] :	$\nu = 0,3$
Module de Young du matériau [GPa] :	$E = 210$
Coefficient de sécurité adopté [SU] :	$s = 4$
Angle de rotation de section max [°] :	$\theta_{\max} = 2,4$
Longueur totale du joint de cardan [m] :	$L = 1,5$
Section employée :	
- Forme	Barre circulaire
- Dimension extérieure [mm]	D

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez le couple transmissible (noté C_{trans} [Nmm]) par le joint de cardan lorsque le tracteur est à son régime nominal.
- Question N°2 :** Déterminez le module de Coulomb (noté G [GPa]) du matériau employé pour la réalisation du joint de cardan.
- Question N°3 :** Déterminez le diamètre D [mm] de la barre servant à la réalisation du joint de cardan en vous servant de l'angle de rotation max des sections extrêmes.
- Question N°4 :** Vérifiez que la contrainte induite dans le joint de cardan est en accord avec l'ensemble des contraintes du cahier des charges.

Afin de faciliter sa manipulation durant les phases de changement d'outil, on se propose de limiter le poids du joint de cardan. Pour se faire, répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°5 :** Déterminez le diamètre extérieur (noté D_{ext} [mm]) d'un tube (épaisseur $e = 4$ mm) dont le poids serait égal à la moitié du poids de la barre précédemment obtenue (même matériau) pour une longueur identique du cardan.
- Question N°6 :** Donnez alors l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte maximale dans ce tube. Concluez quant à son dimensionnement.
- Question N°7 :** Déterminez la raideur en torsion de ce tube.



CORRECTION

Question N°1 : Le couple transmissible par le joint de cardan est :

$$C_{\text{trans}} = \frac{736 \cdot 30 \cdot P}{\omega \cdot \pi}$$

L'application numérique donne :

$$C_{\text{trans}} = 781 \text{ Nm}$$

Question N°2 : Le module de Coulomb est donné pour :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

L'application numérique donne :

$$G = 80,8 \text{ GPa}$$

Question N°3 : L'étude du torseur de section donne :

$$\{\tau_{\text{int}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & C_{\text{trans}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

On donne la formule suivante :

$$\theta_{(x)} = \frac{M_{t(x)} \cdot x}{G \cdot I_G}$$

On souhaite la rotation de section de l'une des extrémités du joint de cardan par rapport à l'autre ainsi :

$$x = L$$

$$I_G = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

$$M_{t(L)} = C_{\text{trans}}$$

Ainsi :

$$\theta_{(L)} = \frac{C_{\text{trans}} \cdot L \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot D^4}$$

Finalement (on passe les degrés en radians) :

$$D = \sqrt[4]{\frac{C_{\text{trans}} \cdot L \cdot 5760}{G \cdot \pi^2 \cdot \theta_{\text{max}}}}$$

L'application numérique donne :

$$D = 0,043\text{m} \approx 44\text{mm}$$

Question N°4 : Il convient à ce stade de vérifier si la contrainte tangentielle maximale dans l'arbre est bien inférieure à la limite d'élasticité en cisaillement. Ainsi :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi \cdot D^3}$$

Il vient :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{C_{\text{trans}} \cdot 16}{\pi \cdot D^3}$$

L'application numérique donne :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = 46,7 \text{ MPa}$$



L'arbre est donc bien dimensionné car :

$$\tau_{\text{torsion-max}} < \frac{R_e}{S}$$

Question N°5 : On cherche à avoir le poids du tube (noté P_{tube}) deux fois plus petit que le poids d'une barre (noté P_{barre}). Ainsi :

$$\frac{P_{\text{barre}}}{2} = P_{\text{tube}}$$

De plus :

$$P_{\text{barre}} = \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot g$$

$$P_{\text{tube}} = \rho \cdot L \cdot \pi \cdot \frac{D_{\text{ext}}^2 - (D_{\text{ext}} - 2 \cdot e)^2}{4} \cdot g$$

Or, nous sommes sur le même matériau, le tube et la barre sont de la même longueur. Ainsi :

$$D^2 = 2 \cdot [D_{\text{ext}}^2 - (D_{\text{ext}} - 2 \cdot e)^2]$$

Après développement :

$$D_{\text{ext}} = \frac{D^2 + 8 \cdot e^2}{8 \cdot e}$$

L'application numérique donne :

$$D_{\text{ext}} = 64,5 \text{ mm}$$

Question N°6 : On cherche ici à valider le dimensionnement du tube par rapport aux contraintes du cahier des charges. Ainsi :

$$\tau_{\text{torsion-max-tube}} = \frac{C_{\text{trans}} \cdot D_{\text{ext}} \cdot 16}{\pi \cdot [D_{\text{ext}}^4 - (D_{\text{ext}} - 2 \cdot e)^4]} = 36 \text{ MPa}$$

$$\theta_{\text{max-tube}} = \frac{C_{\text{trans}} \cdot L \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot [D_{\text{ext}}^4 - (D_{\text{ext}} - 2 \cdot e)^4]} = 0,021 \text{ rad} = 1,2^\circ$$

Finalement

$$\tau_{\text{torsion-max-tube}} \ll \frac{\tau_e}{S}$$

$$\theta_{\text{max-tube}} \ll \theta_{\text{max}}$$

Le tube est donc bien dimensionné.

Question N°7 : La raideur du tube vaut :

$$k = \frac{C}{\theta_{\text{max-tube}}} = 37190,5 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1}$$

☆☆ **Problème N°16 : Dimensionnement d'une transmission de quad**

On se propose dans cet exercice de dimensionner l'arbre qui relie les roues d'un quad à sa motorisation (figure N°1).

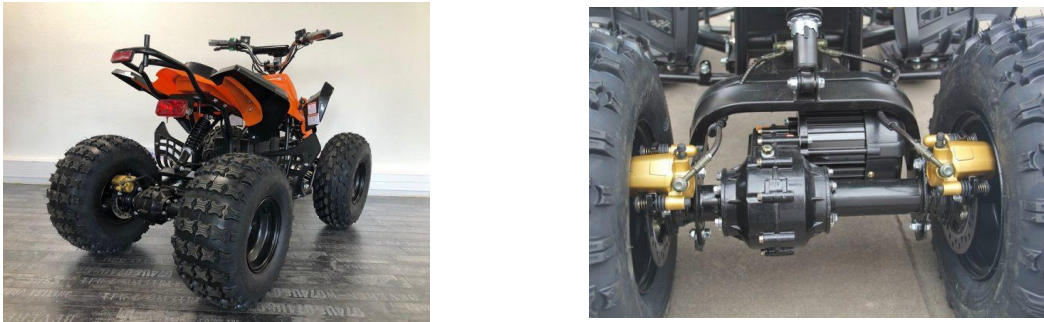


Figure N°1 : Vue de la transmission électrique d'un quad
(source : <https://kidzzz-n-quadzzz.com>)

Pour ce faire, on considère la modélisation suivante (figure N°2) :

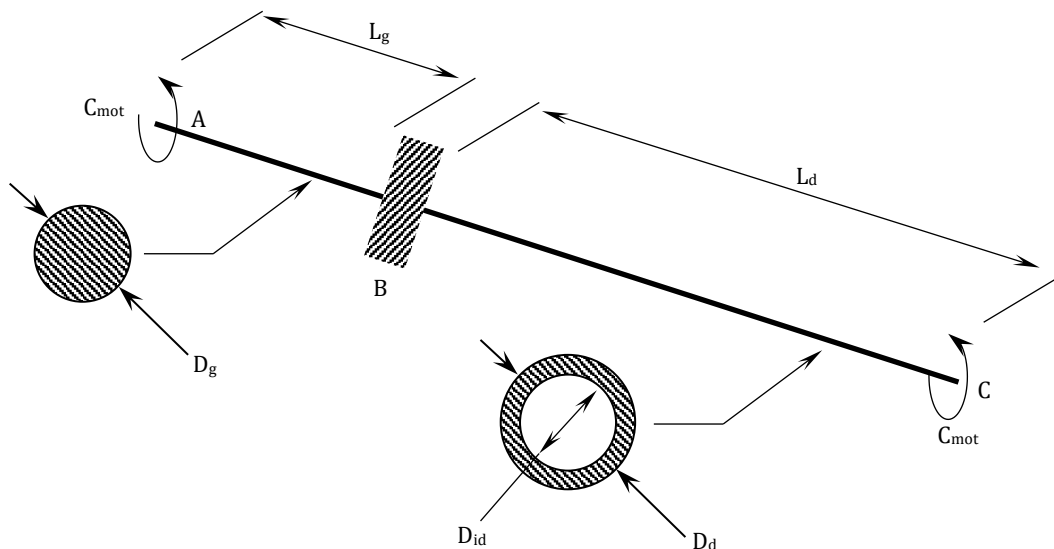


Figure N°2 : Modélisation de la transmission électrique d'un quad

On souhaite déterminer D_g , D_d et D_{id} de telle sorte à respecter le cahier des charges suivant :

- FC1 : La contrainte max dans chacune des barres composant la transmission est la même.
- FC2 : La raideur en torsion de chacune des barres composant la transmission est la même.
- FC3 : La contrainte tangentielle maximale ne doit pas dépasser la valeur de : $\frac{R_{pe}}{s}$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez la relation (eq1) permettant de respecter FC1.
- Question N°2 :** Déterminez la relation (eq2) permettant de respecter FC2
- Question N°3 :** Déterminez la relation (eq3) liant la contrainte maximale dans la barre de gauche en fonction de D_g et des autres données de la FC3.
- Question N°4 :** Résoudre le système précédemment obtenu puis réalisez l'application numérique pour $L_g=300\text{mm}$, $L_d=700\text{mm}$, $s=2$, $R_{pe}=70\text{MPa}$ et $C_{mot}=380\text{Nm}$.



CORRECTION

Question N°1 : L'étude du torseur de section amène pour la partie droite et gauche à :

$$M_t = C_{\text{mot}} \text{ (indépendant du point choisi)}$$

La contrainte maximale dans la barre de gauche s'exprime de la manière suivante :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot D_g \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot D_g^4} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot 16}{\pi \cdot D_g^3}$$

De la même manière pour le tube de droite :

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot D_d \cdot 16}{\pi \cdot (D_d^4 - D_{\text{id}}^4)}$$

L'égalité des contraintes (FC1) donne :

$$\frac{C_{\text{mot}} \cdot 16}{\pi \cdot D_g^3} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot D_d \cdot 16}{\pi \cdot (D_d^4 - D_{\text{id}}^4)}$$

Finalement :

$$\frac{1}{D_g^3} = \frac{D_d}{(D_d^4 - D_{\text{id}}^4)} \quad (\text{eq1})$$

Question N°2 : La raideur (k) d'une poutre en torsion est fonction du moment/couple qu'elle subit et de l'angle de rotation de ses sections extrêmes ($\theta_{i-\text{max}}$). Ainsi :

$$k_i = \frac{C_{\text{mot}}}{\theta_{i-\text{max}}}$$

La fonction contrainte N°2 implique donc :

$$\theta_{d-\text{max}} = \theta_{g-\text{max}}$$

Avec :

$$\theta_{g-\text{max}} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot L_g \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot D_g^4}$$

Et :

$$\theta_{d-\text{max}} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot L_d \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot (D_d^4 - D_{\text{id}}^4)}$$

Finalement :

$$\frac{L_g}{D_g^4} = \frac{L_d}{(D_d^4 - D_{\text{id}}^4)} \quad (\text{eq2})$$

Question N°3 : La fonction contrainte N°3 implique :

$$\frac{R_{\text{pg}}}{s} = \frac{C_{\text{mot}} \cdot 16}{\pi \cdot D_g^3}$$

Finalement :

$$D_g = \sqrt[3]{\frac{C_{\text{mot}} \cdot 16 \cdot s}{\pi \cdot R_{\text{pg}}}} \quad (\text{eq3})$$



Question N°4 : On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{D_g^3} = \frac{D_d}{(D_d^4 - D_{id}^4)} & (eq1) \\ \frac{L_g}{D_g^4} = \frac{L_d}{(D_d^4 - D_{id}^4)} & (eq2) \\ D_g = \sqrt[3]{\frac{C_{mot} \cdot 16 \cdot s}{\pi \cdot R_{pg}}} & (eq3) \end{cases}$$

En injectant (1) dans (2) :

$$\frac{L_g}{L_d} = \frac{D_g}{D_d} \quad (eq4)$$

En injectant (3) dans l'équation (4) :

$$D_d = \sqrt[3]{\frac{C_{mot} \cdot 16 \cdot s}{\pi \cdot R_{pg}}} \cdot \left[\frac{L_d}{L_g} \right]$$

La dernière inconnue peut être déduite de (1) :

$$D_{id} = \sqrt[4]{D_d^4 - D_g^3 \cdot D_d}$$

Finalement l'application numérique donne (au passage, l'ensemble des équations est homogène...) :

$$\begin{cases} D_g = 38,1\text{mm} \\ D_d = 88,9\text{mm} \\ D_{id} = 77,3\text{mm} \end{cases}$$

★★ **Problème N°17 : Calcul du gauchissement d'une section**

On se propose dans cet exercice de mettre en évidence l'impact du gauchissement sur une poutre soumise à un moment de torsion de 300Nm. La figure N°1 présente les différentes configurations retenues pour l'étude :

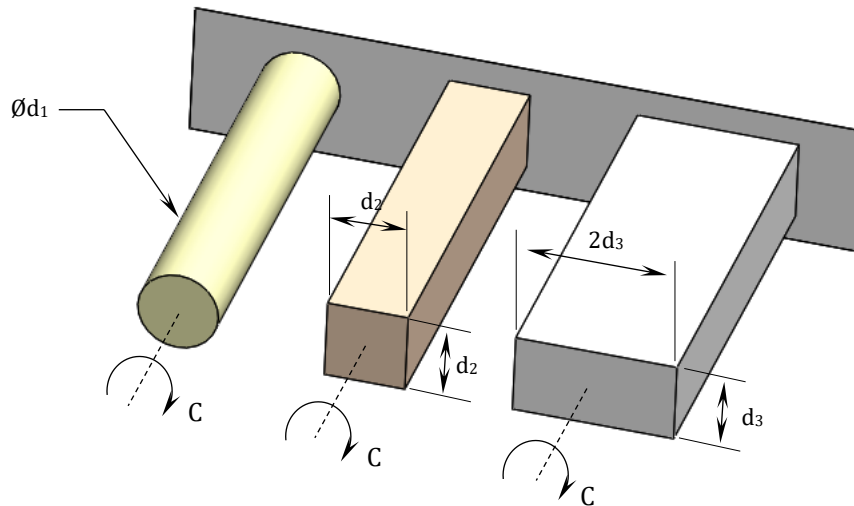
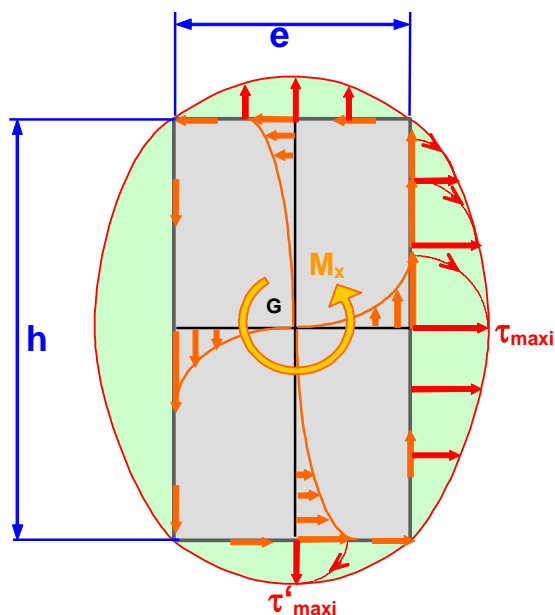


Figure N°1 : Poutres en torsion

Question N°1 : Déterminez la section la plus rationnelle sachant que la contrainte tangentielle maximale admissible est de 60MPa.

ANNEXE : Torsion des sections rectangulaires



La figure ci-contre permet de visualiser la répartition des contraintes tangentielles de torsion dans une barre à section rectangulaire.

On montre alors, en élasticité, que la contrainte maximale de torsion au milieu des grands côtés du rectangle vaut :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{k \cdot e^2 \cdot h}$$

h/e	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10	∞
k	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,313	1/3

CORRECTION



Question N°1 : Pour chacune des trois poutres l'étude du torseur de section amène à :

$$M_t = C \text{ (indépendant du point choisi)}$$

Pour la section circulaire :

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{C \cdot d_1 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot d_1^4} \rightarrow d_1 = \sqrt[3]{\frac{C \cdot 16}{\tau_{\text{adm}} \cdot \pi}} = 29,42 \text{ mm}$$

L'aire vaut donc :

$$A_1 = 679,79 \text{ mm}^2$$

Pour la section carrée :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{C}{k \cdot e^2 \cdot h} \text{ avec } e = h = d_2 \rightarrow \frac{h}{e} = 1 \text{ ainsi } k = 0,208$$

Donc :

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{C \cdot 16}{\tau_{\text{adm}} \cdot k}} = 28,86 \text{ mm}$$

L'aire vaut donc :

$$A_2 = 832,9 \text{ mm}^2$$

Pour la section rectangulaire :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{C}{k \cdot e^2 \cdot h} \text{ avec } 2e = h = d_3 \rightarrow \frac{h}{e} = 2 \text{ ainsi } k = 0,246$$

Donc :

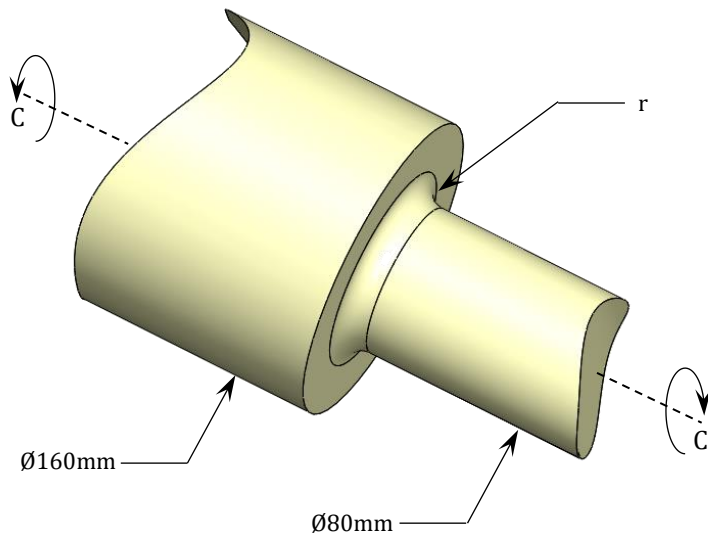
$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{C \cdot 16}{\tau_{\text{adm}} \cdot k}} = 21,66 \text{ mm}$$

L'aire vaut donc :

$$A_3 = 938,3 \text{ mm}^2$$

La section la plus rationnelle est donc circulaire, c'est elle qui minimise la masse d'une poutre soumise à un moment de torsion en ne faisant apparaître aucun phénomène de gauchissement.

★★ **Problème N°18 : Impact de la concentration de contrainte**



On se propose dans cette exercice de calculer l'impact des singularités géométriques sur la puissance transmise par un arbre tournant à 900tr.min^{-1} (figure N°1). La contrainte tangentielle maximale admissible par le matériau constituant cet organe est de 55MPa . Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Figure N°1 : Vue de la singularité géométrique

- Question N°1 :** Déterminez la puissance transmise (en kW) si $r = 4 \text{mm}$.
Question N°2 : Déterminez le gain de puissance si $r = 10 \text{mm}$.

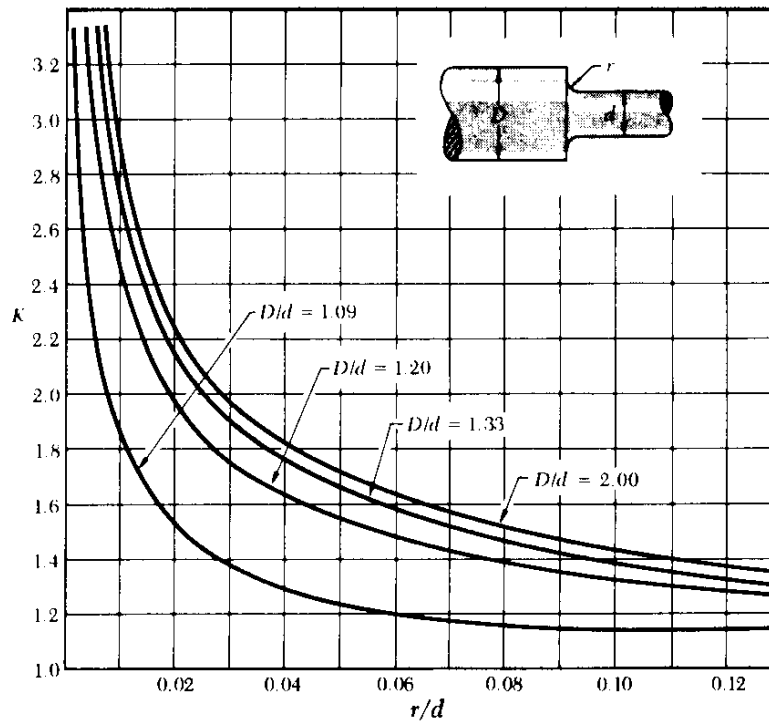


Fig. 3.31 Stress-concentration factors for fillets in circular shafts.

† L. S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular Cross Section and Variable Diameter," *Trans. A.S.M.E.*, vol. 47 (1925), pp. 619-638.



CORRECTION

Question N°1 : L'étude du torseur de section amène à :

$$M_t = C \text{ (indépendant du point choisi)}$$

La valeur du coefficient de concentration de contrainte pour $r = 4 \text{ mm}$ vaut :

$$\begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{160}{80} = 2 \\ \frac{r}{d} = \frac{4}{80} = 0,05 \end{cases} \rightarrow K_t = 1,72$$

La contrainte maximale dans l'arbre vaut :

$$\tau_{\max} = K_t \frac{C \cdot 16}{\pi \cdot D^3}$$

Finalement :

$$C = \frac{\tau_{\max} \cdot \pi \cdot D^3}{16 \cdot K_t}$$

L'application numérique :

$$C = 3214653 \text{ Nmm}$$

La puissance est donc :

$$P = C \cdot \frac{\pi \cdot N}{30} = 3214,653 \cdot \frac{\pi \cdot 900}{30} = 302973,9 \text{ W soit } 303 \text{ kW}$$

Question N°2 : La valeur du coefficient de concentration de contrainte pour $r = 10 \text{ mm}$ vaut :

$$\begin{cases} \frac{D}{d} = \frac{160}{80} = 2 \\ \frac{r}{d} = \frac{10}{80} = 0,125 \end{cases} \rightarrow K_t = 1,35$$

La contrainte maximale dans l'arbre vaut :

$$\tau_{\max} = K_t \frac{C \cdot 16}{\pi \cdot D^3}$$

Finalement :

$$C = \frac{\tau_{\max} \cdot \pi \cdot D^3}{16 \cdot K_t}$$

L'application numérique :

$$C = 4095705,9 \text{ Nmm}$$

La puissance est donc :

$$P = C \cdot \frac{\pi \cdot N}{30} = 386011,2 \text{ W soit } 386 \text{ kW}$$

Le gain se calcule donc :

$$G = \frac{386 - 303}{303} \cdot 100 = 27,4\%$$

☆☆☆ **Problème N°19 : Etude d'un assemblage goupillé**

On se propose dans cet exercice de dimensionner finement un assemblage goupillé (figure N°1). Celui-ci se constitue d'un engrenage ① encastré sur un arbre circulaire ② à l'aide d'une goupille cylindrique ③. Cette transmission de puissance doit supporter le passage d'un couple noté « C ».

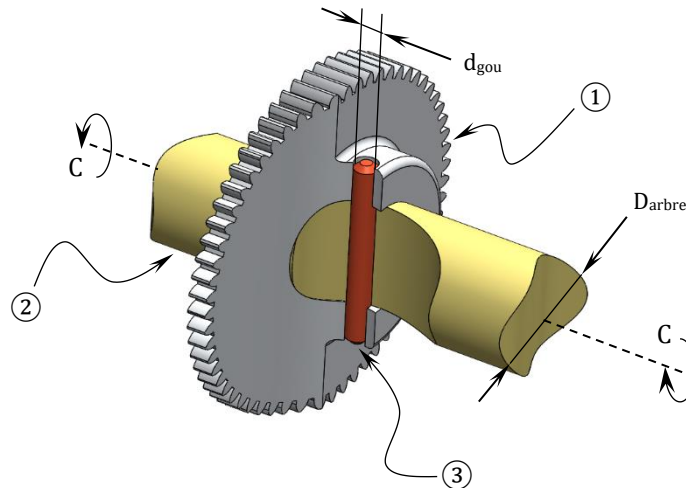


Figure N°1 : Vue en coupe de l'assemblage goupillé

Cet arbre de transmission doit répondre aux contraintes suivantes :

Contrainte maximale admissible par le matériau constituant la goupille [MPa] : $\tau_{gou} = 200$

Contrainte maximale admissible par le matériau constituant l'arbre [MPa] : $\tau_a = 300$

Couple transmissible [Nm] : $C = 500$

Coefficient de sécurité adopté pour l'ensemble de la conception [SU] : $s = 2$

La présence d'un trou dans l'arbre de transmission amène une concentration de contrainte (noté « Kt ») qu'il convient de prendre en compte lors du dimensionnement de la liaison. La relation approchée liant ce facteur à D_{arbre} et d_{gou} est :

$$K_t = 14,8 \cdot \left(\frac{d_{gou}}{D_{arbre}} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{d_{gou}}{D_{arbre}} \right) + 4 \quad \text{pour} \quad \frac{d_{gou}}{D_{arbre}} < 0,7 \quad (\text{eq1})$$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

Question N°1 : Déterminez l'expression (eq2) liant le diamètre de la goupille à l'ensemble des autres paramètres du problème (D_{arbre} , s , τ_g et C). Mettez cette expression sous la forme :

$$\frac{C}{D_{arbre}} = f(s, d_{gou}, \tau_g)$$

Question N°2 : Déterminez l'expression (eq3) liant le diamètre de l'arbre à l'ensemble des autres paramètres du problème (K_t , s , τ_a et C). Mettez cette expression sous la forme :

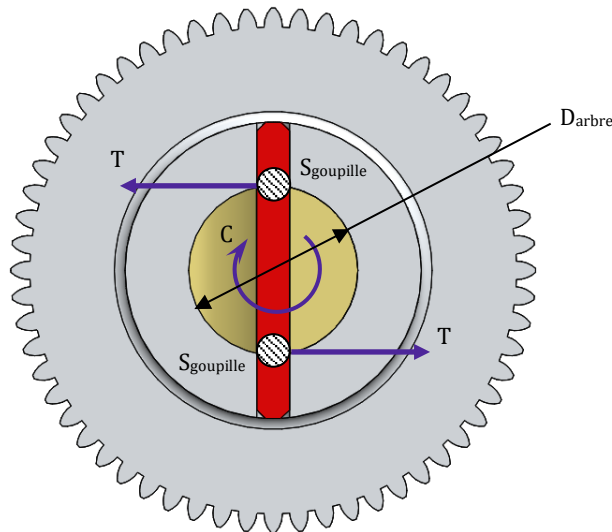
$$\frac{C}{D_{arbre}} = f(K_t, s, D_{arbre}, \tau_g)$$

Question N°3 : Déduire de l'égalité des équations (eq 2) et (eq 3) le rapport (d_{gou}/D_{arbre}) et réinjecter cette expression dans (1). Proposez une manière simple et rapide de résoudre l'équation obtenue. La résolution n'est pas demandée.

Question N°4 : La résolution de l'équation précédente pour la conception considérée amène à $K_t = 4,137$. En déduire la valeur de D_{arbre} et d_{gou} .

CORRECTION

Question N°1 : Nous sommes en présence d'un arbre cylindrique goupillé soumis à un couple C. Ainsi :



On peut écrire que :

$$T = \frac{C \cdot 2}{D_{\text{arbre}}}$$

La résistance au cisaillement de la goupille s'écrit (cf.semestre N°1) :

$$\frac{\tau_{\text{gou}}}{s} = \frac{C \cdot 2}{D_{\text{arbre}} \cdot 2 \cdot S_{\text{goupille}}}$$

Avec :

$$S_{\text{goupille}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{gou}}^2}{4}$$

Ainsi :

$$\frac{\tau_{\text{gou}}}{s} = \frac{C \cdot 4}{\pi \cdot D_{\text{arbre}} \cdot d_{\text{gou}}^2}$$

Finalement :

$$\frac{C}{D_{\text{arbre}}} = \frac{\tau_{\text{gou}} \cdot \pi \cdot d_{\text{gou}}^2}{4 \cdot s} \quad (\text{eq2})$$

Question N°2 : La contrainte nominale dans l'arbre s'exprime de la manière suivante :

$$\tau_{\text{nom}} = \frac{C \cdot D_{\text{arbre}} \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot D_{\text{arbre}}^4} = \frac{C \cdot 16}{\pi \cdot D_{\text{arbre}}^3}$$

Si l'on prend en compte les effets de la concentration de contrainte, il vient :

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{nom}} \cdot K_t$$

Ainsi :

$$\frac{\tau_a}{s} = \frac{C \cdot 16 \cdot K_t}{\pi \cdot D_{\text{arbre}}^3}$$



Finalement :

$$\frac{C}{D_{\text{arbre}}} = \frac{D_{\text{arbre}}^2 \cdot \tau_a \cdot \pi}{s \cdot 16 \cdot Kt} \quad (\text{eq3})$$

Question N°3 : On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Kt = 14,8 \cdot \left(\frac{d_{\text{gou}}}{D_{\text{arbre}}} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{d_{\text{gou}}}{D_{\text{arbre}}} \right) + 4 \quad (\text{eq1}) \\ \frac{C}{D_{\text{arbre}}} = \frac{\tau_{\text{gou}} \cdot \pi \cdot d_{\text{gou}}^2}{4 \cdot s} \quad (\text{eq2}) \\ \frac{C}{D_{\text{arbre}}} = \frac{D_{\text{arbre}}^2 \cdot \tau_a \cdot \pi}{s \cdot 16 \cdot Kt} \quad (\text{eq3}) \end{array} \right.$$

On déduit de l'égalité entre les équations (2) et (3) :

$$\frac{d_{\text{gou}}^2}{D_{\text{arbre}}^2} = \left(\frac{d_{\text{gou}}}{D_{\text{arbre}}} \right)^2 = \frac{\tau_a}{4 \cdot Kt \cdot \tau_{\text{gou}}} \quad (\text{eq4})$$

En injectant le résultat (4) dans (1) :

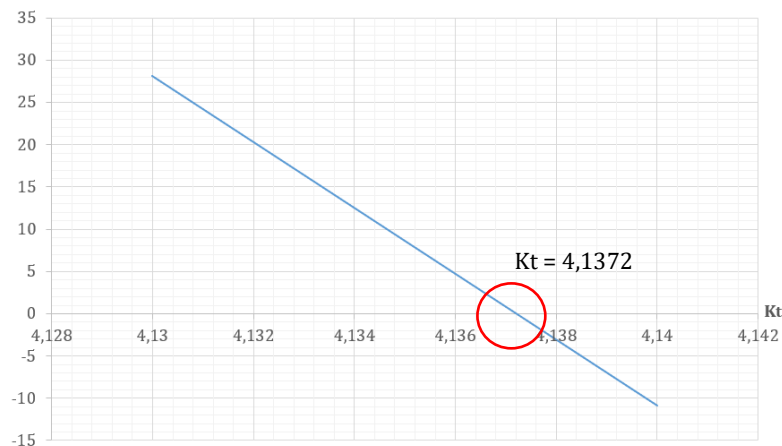
$$Kt = 14,8 \cdot \frac{\tau_a}{4 \cdot Kt \cdot \tau_{\text{gou}}} - 4 \cdot \sqrt{\frac{\tau_a}{4 \cdot Kt \cdot \tau_{\text{gou}}}} + 4$$

En développant on obtient :

$$[4 \cdot Kt \cdot \tau_{\text{gou}} \cdot (4 - Kt)] - [8 \cdot \sqrt{\tau_a \cdot \tau_{\text{gou}}} \cdot \sqrt{Kt}] + [14,8 \cdot \tau_a] = 0$$

Et là il faut beaucoup de talent... ou être malin. En effet, on peut brutalement chercher la solution analytique de ce problème ou simplement tracer l'équation $y=f(Kt)$ pour le cas considéré. Ainsi :

Zoom sur la partie utile de la courbe $y = f(Kt)$



Question N°4 : En injectant le résultat de Kt dans (3) on obtient :

$$D_{\text{arbre}} = 41,3\text{mm}$$

Et finalement à partir de D_{arbre} :

$$d_{\text{gou}} = 12,4\text{mm}$$

On peut retenir les valeurs entières de 42 et 13mm. La valeur de Kt passe alors de 4,14 à 4,18...




Sollicitations composées et problèmes de synthèses

Problème N°20 : Histoire vraie !!

Soit l'annonce suivante parue sur un site internet marchand (LBC®) :

Grue de levage sur tracteur



3 photos disponibles




Mise en ligne le 1 janvier à 11:42

GERARD

Prix	500 €
Ville	Bourgoin-Jallieu 38300

Description :

Bonjour,
je vends une grue de levage adaptable sur le relevage du tracteur.
Levage maxi sur le tracteur:3,50m.
Longueur de flèche: mini 1000mm; maxi 1600mm
Charge maxi homologuée: 500kg mais capacité doublée car le vérin a été surdimensionné (vérin d'origine: diam fût 60mm, diam tige 32mm. Vérin monté: diam fût 75mm, diam tige 55mm).
Le vérin est alimenté par l'hydraulique du tracteur mais possibilité de vente d'une pompe manuelle en cas de besoin pour fonctionner en autonomie.
Rotation de l'embase de la grue 45° droite et gauche avec verrouillage au centre.
Déplacement aisé pour le stockage grâce à ses trois roulettes.

[Sauvegarder l'annonce](#) [Signaler l'annonce](#) [Partager l'annonce](#)   

On se propose de modéliser la grue de la façon suivante :

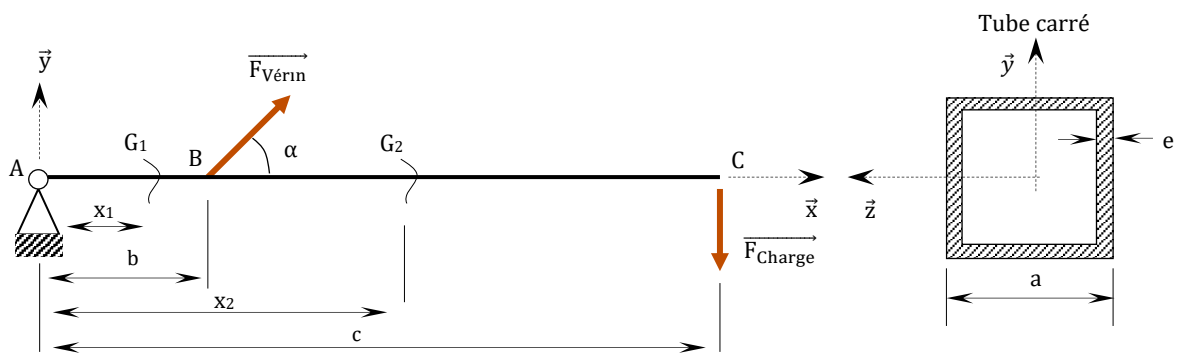


Figure N°1 : Modélisation du problème de la grue

Avec (efforts exprimés en [kN], distances en [mm] et les angles en [°]):

- $\overline{AB} = b\vec{x} = 400\vec{x}$
- $\overline{BC} = c\vec{x} = 1200\vec{x}$
- $a = 60$
- $e = 4$
- $\overline{F_{Charge}} = -10\vec{z}$
- $(\vec{x}; \overline{F_{Vérin}}) = \alpha = 60^\circ$

Le matériau utilisé pour la fabrication de la grue est un acier de type S350 ($R_e=350\text{MPa}$).

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminez les actions mécaniques en A et l'effort généré par le vérin en B pour que le système soit en équilibre statique.
- Question N°2 :** Déterminez les torseurs de section le long de la poutre ABC et tracez ses variations.
- Question N°3 :** Déterminez le point le plus sollicité.
- Question N°4 :** Validez ou non la modification réalisée par le vendeur en utilisant le critère équivalent de Von Mises et Tresca.
- Question N°5 :** Réalisez le même calcul que précédemment mais sans tenir compte des effets de l'effort tranchant. Concluez.
- Question N°6 :** Faut-il mettre en garde Gérard sur les dangers du bricolage?

CORRECTION

Question N°1 : Le BAME donne :

$$\{\tau_A\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R} ; \{\tau_B\}_{B,R} = \begin{Bmatrix} F_v \cdot \cos \alpha & 0 \\ F_v \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R} \text{ et } \{\tau_C\}_{C,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_c & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R}$$

On déplace l'ensemble des torseurs en A :

$$\{\tau_A\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R} ; \{\tau_B\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} F_v \cdot \cos \alpha & 0 \\ F_v \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & b \cdot F_v \cdot \sin \alpha \end{Bmatrix}_{A,R}$$

$$\text{et } \{\tau_C\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_c & 0 \\ 0 & -(b+c) \cdot F_c \end{Bmatrix}_{A,R}$$



L'application du PFS donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} X_A = -\frac{(b+c) \cdot F_c}{b \cdot \tan \alpha} \\ Y_A = -\frac{(b+c) \cdot F_c}{b} \\ F_v = \frac{(b+c) \cdot F_c}{b \cdot \sin \alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = -23094 \text{ N} \\ Y_A = -40000 \text{ N} \\ F_v = 46188 \text{ N} \end{cases}$$

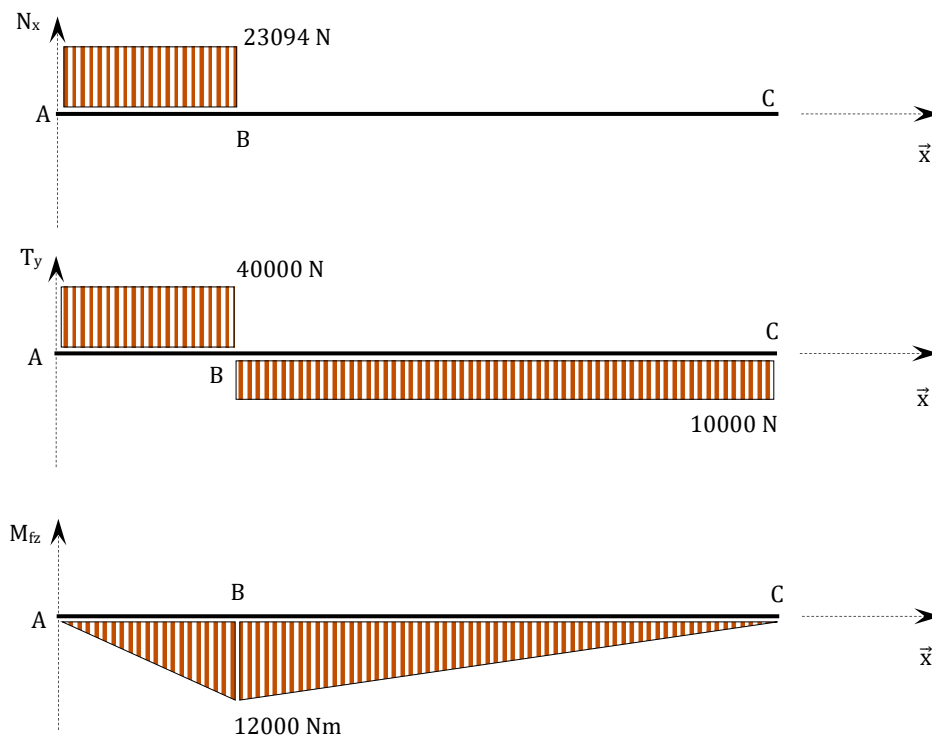
Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < b$

$$\begin{aligned} \{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R} &= -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_1,R} = -\{\tau_A\}_{G_1,R} \\ &= \left. \begin{matrix} \frac{(b+c) \cdot F_c}{b \cdot \tan \alpha} & 0 \\ \frac{(b+c) \cdot F_c}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{(b+c) \cdot F_c}{b} \cdot x_1 \end{matrix} \right\}_{G_1,R} \end{aligned}$$

Etude du torseur de section sur]BC[: $b < x_2 < b+c$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2,R} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2,R} = \{\tau_C\}_{G_2,R} = \left. \begin{matrix} 0 & 0 \\ -F_c & 0 \\ 0 & -[(b+c) - x_2] \cdot F_c \end{matrix} \right\}_{G_2,R}$$

Le tracé des diagrammes donne :



Question N°3 : Le point le plus sollicité est $B \in AB$ avec :

$$\begin{cases} N_x = 23094 \text{ N} \\ T_y = 40000 \text{ N} \\ M_{fz} = -12000 \text{ Nm} \end{cases}$$



Question N°4 : La superposition des contraintes normales (traction+flexion) amène à :

$$\sigma_{\text{normale}} = \sigma_{\text{traction}} + \sigma_{\text{flexion}} = \frac{N_x}{S} - \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}}$$

La contrainte tangentielle vaut quant à elle :

$$\tau_{\text{tangentielle}} = \tau_{\text{cisaillement}} = \frac{T_y}{S}$$

L'application numérique donne pour un point maximisant la contrainte normale (ici $y=-20\text{mm}$):

$$\sigma_{\text{normale}} = 25,77 + 764,82 = 790,59 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{tangentielle}} = 44,64 \text{ MPa}$$

Les contraintes équivalentes de Von Mises et de Tresca sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\sigma_{\text{normale}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{tangentielle}}^2} \\ \sigma_{\text{T}} = \sqrt{\sigma_{\text{normale}}^2 + 4 \cdot \tau_{\text{tangentielle}}^2} \end{cases}$$

L'application numérique donne :

$$\begin{cases} \sigma_{\text{VM}} = 794,33 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{T}} = 795,9 \text{ MPa} \end{cases}$$

Ca sent pas bon pour Gérard !!!

Question N°5 : En reprenant les résultats de la question précédente, il vient :

Les contraintes équivalentes de Von Mises et de Tresca sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\sigma_{\text{normale}}^2} = 790,59 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{T}} = \sqrt{\sigma_{\text{normale}}^2} = 790,59 \text{ MPa} \end{cases}$$

Finalement si on néglige l'effort tranchant, on commet une erreur de 0,47% sur la contrainte équivalente de Von Mises et 0,67% d'erreur sur celle de Tresca.

Question N°6 : Dans tous les cas, la grue de Gérard est sous dimensionnée car :

$$\sigma_{\text{VM}} \text{ ou } \sigma_{\text{T}} > R_e$$

Problème N°21 : Dimensionnement d'un arbre d'hélice

Actuellement un constructeur de bateau de plaisance commercialise des modèles dont la motorisation ne dépasse pas les 80CV. Il souhaiterait à présent élargir son offre pour proposer à ses clients une gamme complète allant de 45 à 160CV. Afin de limiter les coûts, on se propose de standardiser le plus de composants de cette transmission indépendamment de la gamme de moteur sélectionnée (stratégie « re-use »).



Figure N°1 : Vue d'une ligne d'arbre de bateau
(Source : <https://www.bigship.com>)

Cette exercice vise à valider la possibilité d'utiliser la même ligne d'arbre (figure N°1) pour l'ensemble de la gamme de moteurs proposée par ce constructeur. Cette transmission étant essentiellement composée d'une barre circulaire, on s'intéressera uniquement à la partie servant de fixation à l'hélice (figure N°2).

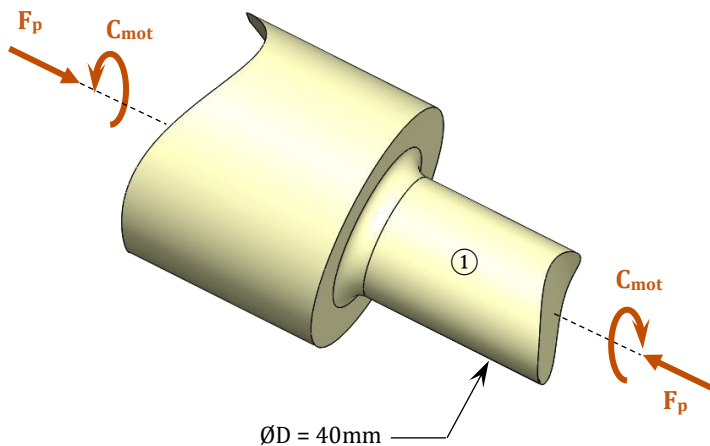


Figure N°2 : Vue de la fixation de l'hélice sur la ligne d'arbre

On donne :

- $Kt_{traction} = 2,12$
- $Kt_{torsion} = 1,55$
- $Re = 300 \text{ MPa}$
- Coefficient de sécurité $s = 4$

Le moteur retenu est un Renault® Dci160 (puissance « P » de 160CV à une vitesse « ω » de 3750 tr.min⁻¹).

La force de poussée de l'hélice (notée « F_p ») à plein régime est de 12kN.

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez l'expression de la contrainte normale maximale dans la partie N°1 de la ligne d'arbre.
- Question N°2 :** Déterminez l'expression de la contrainte tangentielle maximale dans la partie N°1 de la ligne d'arbre.
- Question N°3 :** Déterminez l'expression de la contrainte équivalente de Von Mises maximale au sein de la partie N°1 de la ligne d'arbre.
- Question N°4 :** Déduire de la question précédente si l'utilisation du moteur Renault® Dci160 est envisageable.
- Question N°5 :** A quelle puissance est-il possible de monter avant de risquer l'intégrité de la ligne d'arbre ?



CORRECTION

Question N°1 : La contrainte normale (de traction) maximale dans la partie ① est :

$$\sigma_{\text{normale}} = K_{t_{\text{traction}}} \cdot \frac{4 \cdot F_p}{\pi \cdot D^2}$$

Question N°2 : La contrainte tangentielle (de torsion) maximale dans la partie ① est :

$$\tau_{\text{tangentielle}} = K_{t_{\text{torsion}}} \cdot \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3}$$

En utilisant la puissance moteur, cette expression devient :

$$\tau_{\text{tangentielle}} = K_{t_{\text{torsion}}} \cdot \frac{16 \cdot P}{\omega \cdot \pi \cdot D^3}$$

Question N°3 : La contrainte de Von Mises maximale vaut :

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\left(K_{t_{\text{traction}}} \cdot \frac{4 \cdot F_p}{\pi \cdot D^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(K_{t_{\text{torsion}}} \cdot \frac{16 \cdot P}{\omega \cdot \pi \cdot D^3}\right)^2}$$

Finalement

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{(K_{t_{\text{traction}}} \cdot 4 \cdot F_p \cdot D \cdot \omega)^2 + 3(K_{t_{\text{torsion}}} \cdot 16 \cdot P)^2}{(\omega \cdot \pi \cdot D^3)^2}}$$

Question N°4 : L'application numérique donne :

$$\sigma_{\text{VM}} = 67,2 \text{ MPa}$$

Finalement :

$$\frac{R_e}{s} > \sigma_{\text{VM}}$$

Le dimensionnement de la ligne est donc validé pour le montage sur une motorisation plus importante.

Question N°5 : D'après les résultats précédents :

$$\frac{R_e}{s} = \sqrt{\frac{(K_{t_{\text{traction}}} \cdot 4 \cdot F_p \cdot D \cdot \omega)^2 + 3(K_{t_{\text{torsion}}} \cdot 16 \cdot P)^2}{(\omega \cdot \pi \cdot D^3)^2}}$$

Ainsi :

$$P = \sqrt{\frac{\left(\frac{R_e \cdot \omega \cdot \pi \cdot D^3}{s}\right)^2 - (K_{t_{\text{traction}}} \cdot 4 \cdot F_p \cdot D \cdot \omega)^2}{3 \cdot (K_{t_{\text{torsion}}} \cdot 16)^2}}$$

L'application numérique donne :

$$P = 132,7 \text{ kW} = 180 \text{ CV}$$

Problème N°22 : Etude d'un pivot de roue

On se propose de dimensionner le pivot d'une roue de voiture. Sa modélisation est présentée dans la figure N°1 :

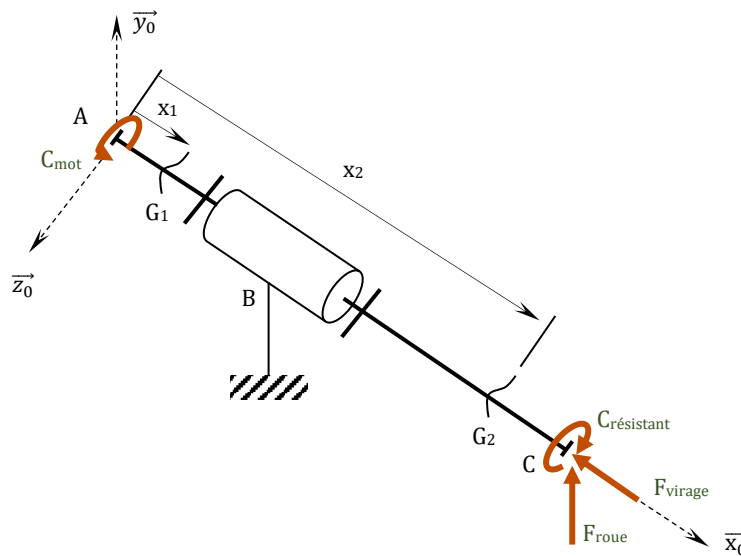


Figure N°1 : modélisation d'un pivot de roue

Avec (les distances sont exprimées en [mm], les efforts en [N] et les moments en [Nm]) :

- $\vec{AB} = a\vec{x}_0 = 100 \vec{x}_0$
- $\vec{AC} = b\vec{x}_0 = 300 \vec{x}_0$
- $\vec{F}_{roue} = 1000 \vec{y}_0$
- $\vec{F}_{virage} = -2000 \vec{x}_0$
- $\vec{C}_{résistant} = -380 \vec{x}_0$
- $\vec{C}_{mot} = C_{mot} \vec{x}_0$

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez les actions de liaison en B et le couple moteur en A.
- Question N°2 :** Déterminez les torseurs de cohésion le long de la poutre]ABC[.
- Question N°3 :** Tracez les diagrammes des sollicitations auxquelles la poutre]ABC[est soumise et en déduire le point le plus sollicité.

Soit la section droite (figure N°2) de la poutre au point le plus sollicité :

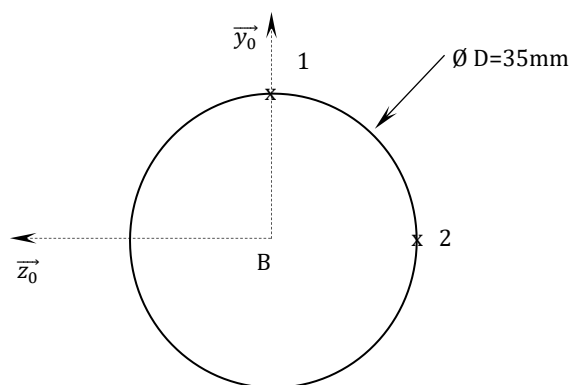


Figure N°2 : Section droite de la poutre ABC

- Question N°4 :** Calculez les contraintes liées à l'expression du torseur de section précédent au point 1 et 2 (figure N°2).
- Question N°5 :** Calculez la contrainte équivalente de Von Mises et de Tresca au point N°1 et N°2 (figure N°2). Est-ce que le pivot de roue est bien dimensionné si la limite d'élasticité du matériau qui le compose vaut $R_e=700\text{MPa}$?



CORRECTION

Question N°1 : Le BAME donne :

$$\begin{aligned} \{\tau_A\}_{A,R_0} &= \begin{Bmatrix} 0 & C_{\text{mot}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ X_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B,R_0} \text{ et } \{\tau_C\}_{C,R_0} \\ &= \begin{Bmatrix} -F_v & -C_{\text{res}} \\ F_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_0} \end{aligned}$$

On déplace l'ensemble des torseurs en B :

$$\begin{aligned} \{\tau_A\}_{B,R_0} &= \begin{Bmatrix} 0 & C_{\text{mot}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B,R_0} \\ \text{et } \{\tau_C\}_{B,R_0} &= \begin{Bmatrix} -F_v & -C_{\text{res}} \\ F_r & 0 \\ 0 & (b-a) \cdot F_r \end{Bmatrix}_{B,R_0} \end{aligned}$$

L'application du PFS donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} X_B = F_v \\ Y_B = -F_r \\ Z_B = 0 \\ C_{\text{mot}} = C_{\text{res}} \\ M_B = 0 \\ N_B = -(b-a) \cdot F_r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_B = 2000 \text{ N} \\ Y_B = -1000 \text{ N} \\ Z_B = 0 \\ C_{\text{mot}} = 380 \text{ Nm} \\ M_B = 0 \\ N_B = -200 \text{ Nm} \end{cases}$$

Question N°2 : Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < a$

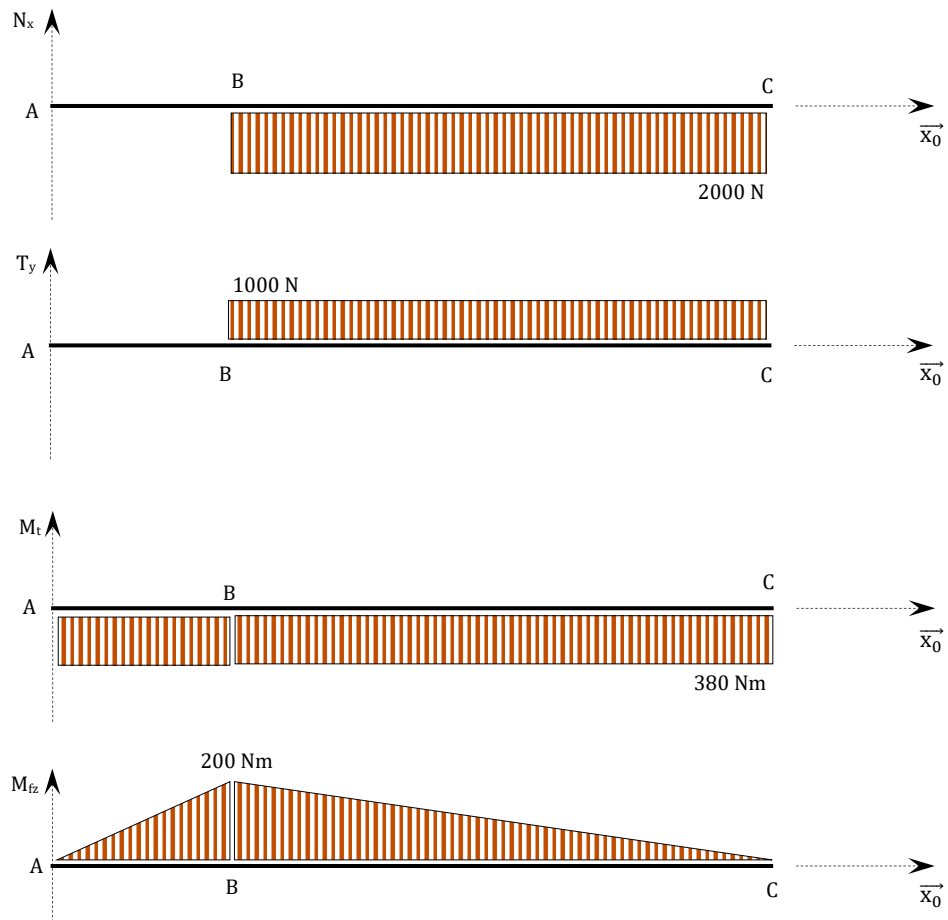
$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_A\}_{G_1,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & -C_{\text{mot}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1,R_0}$$

Etude du torseur de section sur]BC[: $a < x_2 < b$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2,R_0} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_2,R_0} = \{\tau_C\}_{G_2,R_0} = \begin{Bmatrix} -F_v & C_{\text{res}} \\ F_r & 0 \\ 0 & (b-x_2) \cdot F_r \end{Bmatrix}_{G_2,R_0}$$



Question N°3 : Le tracé des diagrammes donne :



Le point B ∈ BC est le plus sollicité

Question N°4 : Les contraintes au point B sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\sigma_{\text{traction}} = \frac{N_x}{S}$$

$$\tau_{\text{cisaillement-moy}} = \frac{T_y}{S}$$

$$\tau_{\text{torsion-max}} = \frac{M_t}{I_G} \cdot \frac{D}{2}$$

$$\sigma_{\text{flexion}} = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$$

Ainsi :

Point (z ; y)	σ_{traction} [MPa]	$\tau_{\text{cisaillement}}$ [MPa]	τ_{torsion} [MPa]	σ_{flexion} [MPa]
1 (0 ; R)	-2,1	1	-45,1	-47,5
2 (-D/2 ; 0)	-2,1	1	45,1	0



Question N°5 : Les contraintes équivalents de Von Mises et Tresca sont :

$$\begin{cases} \sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_{traction} + \sigma_{flexion})^2 + 3 \cdot (\tau_{cisaillement} + \tau_{torsion})^2} \\ \sigma_T = \sqrt{(\sigma_{traction} + \sigma_{flexion})^2 + 4 \cdot (\tau_{cisaillement} + \tau_{torsion})^2} \end{cases}$$

Ainsi :

Point (z ; y)	σ_{VM} [MPa]	σ_T [MPa]
1 (0 ; R)	91	101,2
2 (-D/2 ; 0)	79,9	92,2

Question N°5 : La poutre est donc correctement dimensionnée. En effet :

$$\sigma_{VM} \text{ ou } \sigma_T < R_e$$

Problème N°23 : Etude d'un arbre de rectifieuse

Soit la mise en plan d'une broche de rectifieuse (figure N°1) :

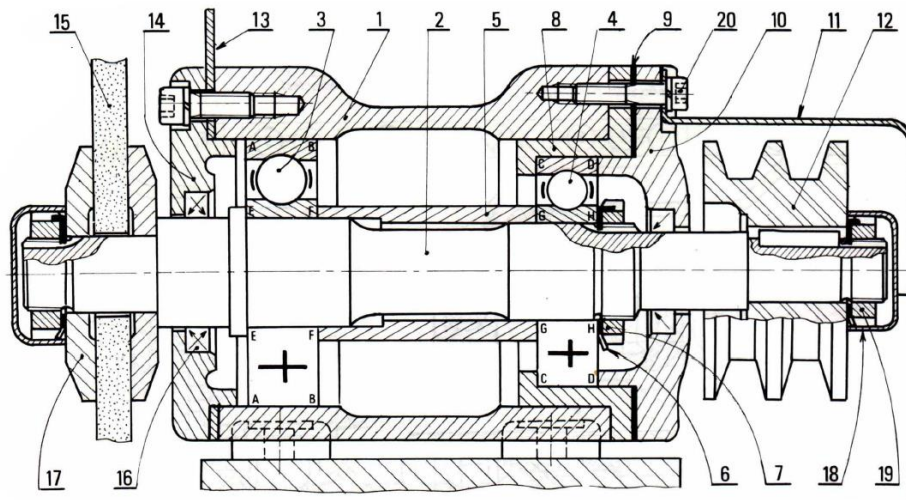


Figure N°1 : Broche de rectifieuse

On souhaite pré-dimensionner l'arbre (2). La modélisation retenue pour la broche est la suivante (figure N°2) :

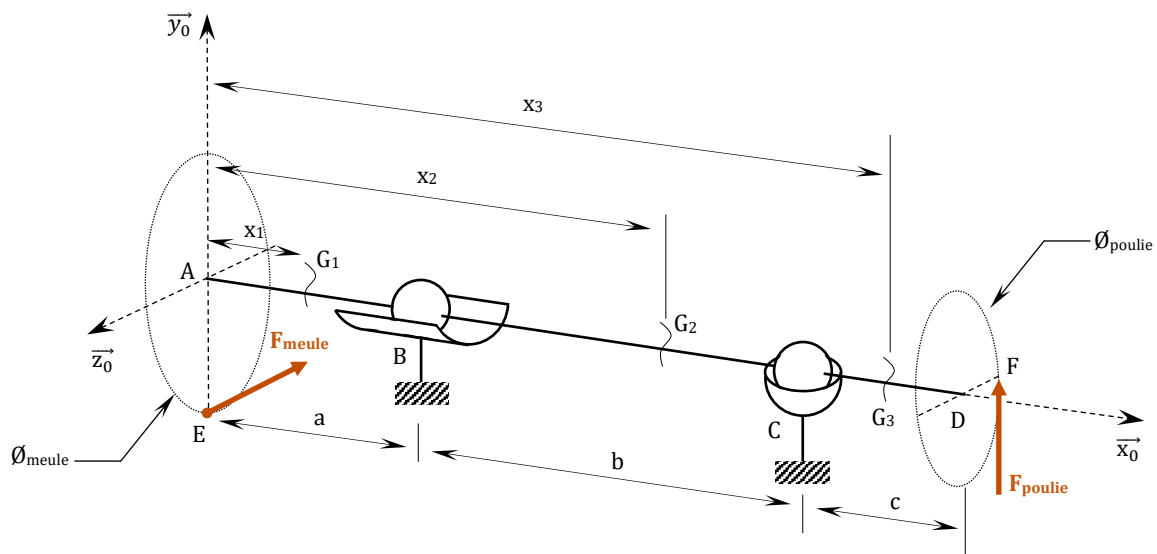


Figure N°2 : Modélisation de la broche de rectifieuse

Avec (les efforts sont en [N] et les distances en [mm]) :

- $\overline{AB} = a\overline{x_0} = 100\overline{x_0}$
- $\overline{BC} = b\overline{x_0} = 150\overline{x_0}$
- $\overline{CD} = c\overline{x_0} = 80\overline{x_0}$
- $\varnothing_{meule} = 200\text{mm}$
- $\varnothing_{poulie} = 110\text{mm}$
- $\overline{F_{meule}} = -1000\overline{z_0}$
- $\overline{F_{poulie}} = F_{poulie}\overline{y_0}$

De plus, la limite d'élasticité du matériau retenu pour la conception de la broche est $R_e=300\text{MPa}$. Le coefficient de sécurité adopté est de $s = 5$.

Question N°1 : Déterminez le diamètre D de l'arbre (2). Pour ce faire, vous ne tiendrez pas compte des effets liés aux efforts tranchants et aux concentrations de contrainte.



CORRECTION

Le BAME donne :

$$\{\tau_E\}_{E,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F_{meule} & 0 \end{Bmatrix}_{E,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_0} ;$$

$$\{\tau_C\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_0} ; \{\tau_F\}_{F,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{poulie} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{F,R_0}$$

On déplace l'ensemble des torseurs en C :

$$\{\tau_E\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\varnothing_{meule} \cdot F_{meule}}{2} \\ 0 & -(a+b) \cdot F_{meule} \\ -F_{meule} & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_0} ; \{\tau_B\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & b \cdot Z_B \\ Z_B & -b \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{C,R_0} ;$$

$$\{\tau_C\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_0} ; \{\tau_F\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\varnothing_{poulie} \cdot F_{poulie}}{2} \\ F_{poulie} & 0 \\ 0 & c \cdot F_{poulie} \end{Bmatrix}_{C,R_0}$$

L'application du PFS donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_B + Y_C + F_{poulie} = 0 \\ -F_{meule} + Z_B + Z_C = 0 \\ \frac{\varnothing_{meule} \cdot F_{meule}}{2} + \frac{\varnothing_{poulie} \cdot F_{poulie}}{2} = 0 \\ -(a+b) \cdot F_{meule} + b \cdot Z_B = 0 \\ -b \cdot Y_B + c \cdot F_{poulie} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_C = 0 \\ Y_C = \frac{(b+c) \cdot \varnothing_{meule} \cdot F_{meule}}{b \cdot \varnothing_{poulie}} \\ Z_C = -\frac{a \cdot F_{meule}}{b} \\ F_{poulie} = -\frac{\varnothing_{meule} \cdot F_{meule}}{\varnothing_{poulie}} \\ Z_B = \frac{(a+b) \cdot F_{meule}}{b} \\ Y_B = -\frac{c \cdot \varnothing_{meule} \cdot F_{meule}}{b \cdot \varnothing_{poulie}} \end{cases}$$

L'application numérique donne :

$$\begin{cases} X_C = 0 \text{ N} \\ Y_C = 2787,9 \text{ N} \\ Z_C = -666,7 \text{ N} \\ F_{poulie} = -1818,2 \text{ N} \\ Z_B = 1666,7 \text{ N} \\ Y_B = -969,7 \text{ N} \end{cases}$$

Il convient à présent d'étudier les trois tronçons qui composent l'arbre ②. Ainsi :

Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < a$

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_{ext \rightarrow E_1}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_E\}_{G_1,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & -100 \cdot 10^3 \\ 0 & x_1 \cdot 1000 \\ 1000 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1,R_0} [N; Nmm]$$



Etude du torseur de section sur]BC[: $a < x_2 < a+b$

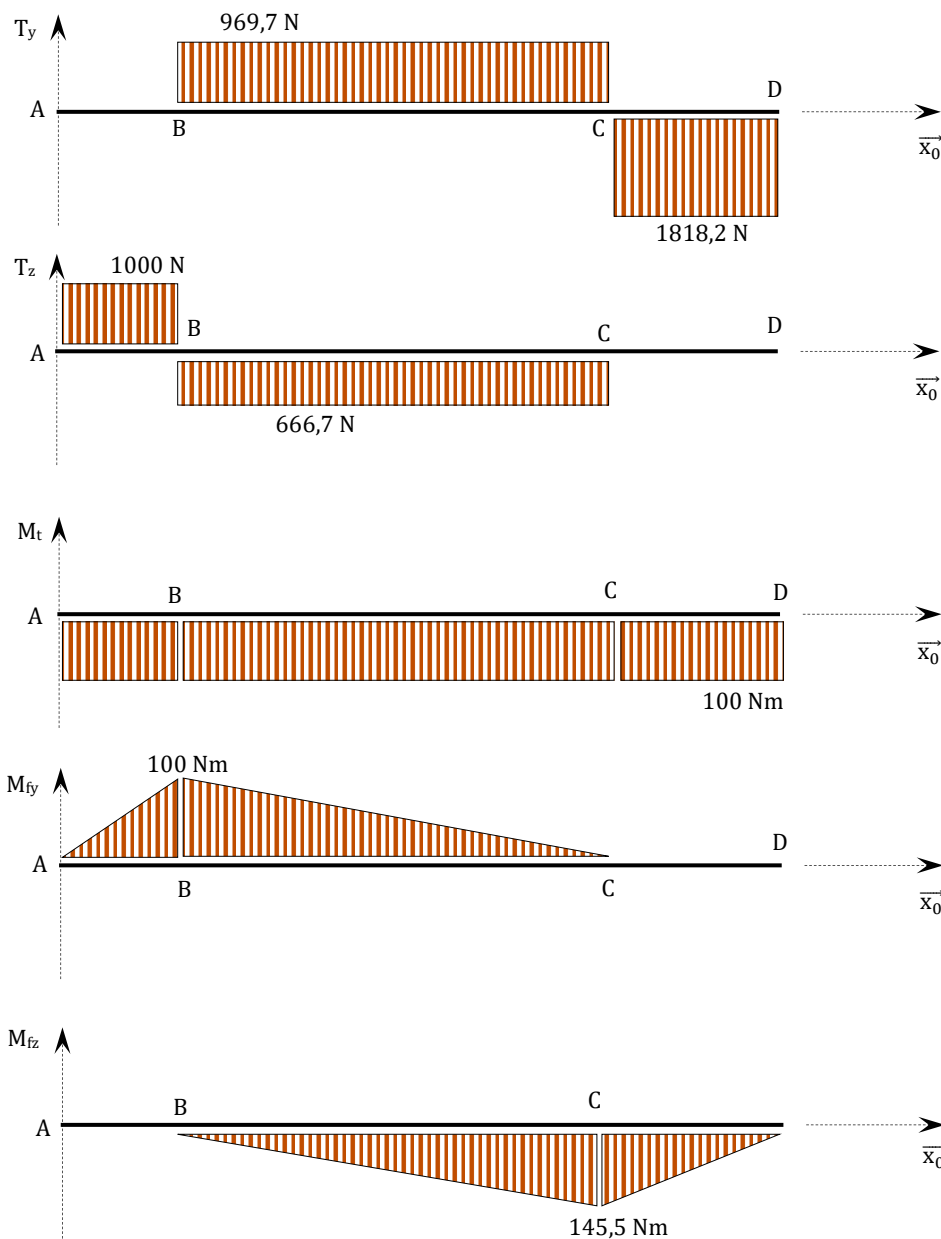
$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_2, R_0} = -\{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_1}\}_{G_2, R_0} = -[\{\tau_E\}_{G_2, R_0} + \{\tau_B\}_{G_2, R_0}] =$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & -100 \cdot 10^3 \\ 969,7 & 166,7 \cdot 10^3 - 666,7 \cdot x_2 \\ -666,7 & (100 - x_2) \cdot 969,7 \end{Bmatrix}_{G_2, R_0} \quad [N; Nmm]$$

Etude du torseur de section sur]CD[: $a+b < x_2 < a+b+c$

$$\{\tau_{\text{int}}\}_{G_3, R_0} = \{\tau_{\text{ext} \rightarrow E_2}\}_{G_3, R_0} = \{\tau_F\}_{G_3, R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & -100 \cdot 10^3 \\ -1818,2 & 0 \\ 0 & -1818,2 \cdot (330 - x_3) \end{Bmatrix}_{G_3, R_0} \quad [N; Nmm]$$

Le tracé des diagrammes donne :



Le point le plus sollicité est le point C.



Il convient à présent de déterminer les différentes contraintes au sein de la section. Avec :

$$I_{Gz} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$I_G = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

$$y = R = \frac{D}{2}$$

Il vient :

$$\sigma_{normale} = -\frac{M_{fz} \cdot 32}{\pi \cdot D^3} = \frac{4656 \cdot 10^3}{\pi \cdot D^3}$$

$$\tau_{tangentielle-max} = \tau_{torsion-max} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi \cdot D^3} = \frac{1600 \cdot 10^3}{\pi \cdot D^3}$$

L'expression de la contrainte de Von Mises (ou Tresca c'est au choix) donne :

$$\sigma_{VM} = \frac{R_e}{s} = \sqrt{(\sigma_{normale})^2 + 3 \cdot (\tau_{tangentielle-max})^2}$$

Soit :

$$\frac{R_e}{s} = \sqrt{\left(\frac{4656 \cdot 10^3}{\pi \cdot D^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1600 \cdot 10^3}{\pi \cdot D^3}\right)^2}$$

Donc :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{\sqrt{(4656 \cdot 10^3)^2 + 3 \cdot (1600 \cdot 10^3)^2}}{\pi \cdot D^3}$$

Finalement

$$D = \left[\frac{s \cdot \sqrt{(4656 \cdot 10^3)^2 + 3 \cdot (1600 \cdot 10^3)^2}}{\pi \cdot R_e} \right]^{\frac{1}{3}}$$

L'application numérique donne :

$$D = 30,6\text{mm soit } 31\text{mm}$$

Attention, il conviendrait à ce stade de l'étude de vérifier l'impact des concentrations de contrainte...

Problème N°24 : Conception d'une clé dynamométrique

On se propose dans cette exercice de valider l'étude menée sur la clé dynamométrique à réarmement manuel FACOM® modèle 203DA (figure N°1).

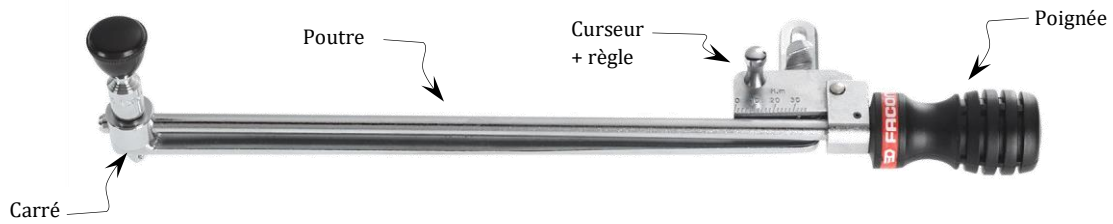


Figure N°1 : Clé dynamométrique FACOM® 203DA
(source : Facom.fr)

Le fonctionnement de la clé repose sur le réglage d'un curseur au couple de serrage souhaité (figure N°2) et de la déformation d'une poutre servant de corps d'épreuve à la clé. L'action de l'opérateur sur la poignée permet le serrage de l'écrou. Parallèlement, cet effort entraîne le déplacement de l'ensemble « poutre + règle » le long du curseur. Lorsque le couple de serrage est atteint, la règle se replie le long de la poutre indiquant à l'opérateur qu'il convient d'arrêter de serrer (figure N°3).



Figure N°2 : Réglage du curseur
(source : <https://www.systemed.fr>)



Figure N°3 : « déclenchement » du curseur
(source : <https://www.systemed.fr>)

On se propose dans une première partie de cette étude de valider le dimensionnement de la clé puis de retrouver dans une deuxième partie la graduation nécessaire au réglage du couple de serrage. Pour ce faire on considère la modélisation suivante (figure N°4) :

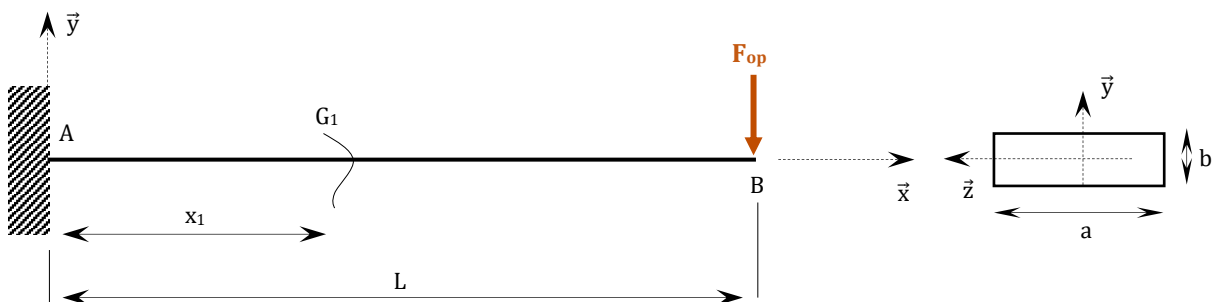


Figure N°4 : Modélisation de la clé



Partie N°0 : Etude préliminaire

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez la relation liant le couple de serrage (noté « C_{ser} ») à l'action fournie par l'opérateur sur la poignée de la clé (noté « F_{op} ») en fonction de la longueur de cette dernière (noté « L »).
- Question N°2 :** Déterminez le torseur de cohésion le long de la poutre]AB[.

Partie N°1 : Validation du dimensionnement de la clé

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°3 :** Tracez les diagrammes des sollicitations auxquelles la poutre]AB[est soumise et en déduire le point le plus sollicité.
- Question N°4 :** Validez le dimensionnement de la clé sachant que :
- Le matériau employé pour sa réalisation a une limite d'élasticité de 500MPa.
 - Vous négligerez les effets de l'effort tranchant.
 - La clé est vendue pour un couple maximal de 3,6daN.m.
 - $L = 32\text{cm}$, $a = 20\text{mm}$ et $b = 5\text{mm}$.

Partie N°2 : Recherche de la graduation de la règle

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°5 :** Déterminez la relation liant le déplacement du curseur en fonction du couple de serrage, de la géométrie de la clé et de son matériau. On considèrera, afin de simplifier l'étude que le curseur est fixé au même niveau que la poignée.
- Question N°6 :** Déduire de la question précédente la distance entre deux graduations sachant que :
- La résolution de la règle est de 2Nm.
 - $E = 210\text{GPa}$
 - $L = 32\text{cm}$, $a = 20\text{mm}$ et $b = 5\text{mm}$
- Question N°7 :** Donnez la raideur en flexion de la poutre.

CORRECTION

- Question N°1 :** Le PFS donne le couple de serrage en fonction de la force exercée par l'opérateur et de la géométrie de la clé :

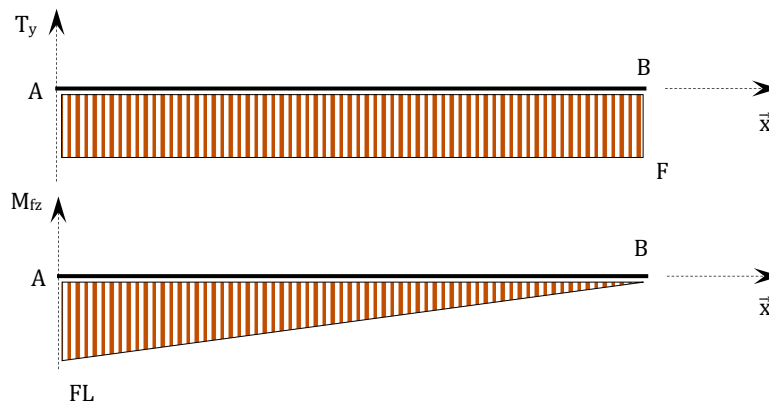
$$C_{ser} = F_{op} \cdot L$$

- Question N°2 :** Etude du torseur de section sur]AB[: $0 < x_1 < L$

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -F_{op} & 0 \\ 0 & -F_{op}(L - x_1) \end{array} \right\}_{G_1,R}$$



Question N°3 : Le diagramme des sollicitations donne :



Le point A est le plus sollicité

Question N°4 : On donne la formule suivante pour calculer la contrainte normale liée à une sollicitation en flexion :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{fy} \cdot z}{I_{Gy}}$$

Ici,

$$\begin{cases} M_{fy} = 0 \\ M_{fz} = -F_{op} \cdot L \end{cases}$$

De plus,

$$I_{Gz} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

On se place au point où la section est la plus sollicitée (point le plus éloigné de l'axe neutre $\sigma_{xx} = 0$) :

$$y = \mp \frac{b}{2}$$

Il vient :

$$\sigma_{flexion} = \frac{6 \cdot F_{op} \cdot L}{a \cdot b^2}$$

Si on remplace F_{op} par l'expression trouvée à la question N°1, il vient :

$$\sigma_{flexion} = \frac{6 \cdot C_{ser}}{a \cdot b^2}$$

L'application numérique donne :

$$\sigma_{flexion} = 432 \text{ MPa}$$

Finalement on remarque que la clé est correctement dimensionnée pour sa plage d'utilisation car :

$$R_e \geq \sigma_{flexion}$$

Question N°5 : On donne la relation suivante :

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y'' = M_{fz}$$

Dans notre cas :

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y'' = F_{op} \cdot x_1 - L \cdot F_{op} \quad (\text{eq1})$$

Une première intégration donne :



$$E \cdot I_{Gz} \cdot y' = \left(\frac{F_{op} \cdot x_1^2}{2} \right) - (L \cdot F_{op} \cdot x_1) + C_1 \quad (\text{eq2})$$

Enfin, une seconde intégration donne :

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y = \left(\frac{F_{op} \cdot x_1^3}{6} \right) - \left(\frac{L \cdot F_{op} \cdot x_1^2}{2} \right) + (C_1 \cdot x_1) + C_2 \quad (\text{eq 3})$$

L'application des conditions aux limites et notamment celles au point A permet d'écrire :

$$\text{pour } x_1 = 0 ; y' = 0 \text{ et } y = 0$$

Finalement l'application de ces conditions aux limites aux équations 1 et 2 donne :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation de la flèche devient :

$$y = \frac{F_{op} \cdot x_1^2}{6 \cdot E \cdot I_{Gz}} \cdot (x_1 - 3 \cdot L) \quad (\text{eq4})$$

Question N°6 : On cherche le déplacement de la règle ($x_1=L$) pour un couple de serrage de 2Nm. L'équation (4) précédente devient :

$$y = - \frac{F_{op} \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_{Gz}} \quad (\text{eq5})$$

En remplaçant (5) par l'expression déterminée à la question N°1, il vient :

$$y = - \frac{C_{ser} \cdot L^2}{3 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

De plus,

$$I_{gz} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

Finalement :

$$y = - \frac{4 \cdot C_{ser} \cdot L^2}{E \cdot a \cdot b^3}$$

L'application numérique donne :

$$y = 1,56 \text{ mm}$$

Question N°7 : La raideur en flexion de la poutre vaut :

$$k = F_{op} \cdot \frac{1}{y} = \frac{C_{ser}}{L \cdot y} = \frac{2 \cdot 10^3}{320 \cdot 1,56} = 4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$$