



Département Génie Mécanique et Productique  
Laboratoire de dimensionnement des structures  
17 rue de France  
69627 Villeurbanne cedex

# Problèmes de dimensionnement des structures

---

**Semestre N°1 – Module M1102**



Rédigé par : Equipe de DDS

## Organisation des séances

Nombre de séances de TD : 10

### Chapitre : Torseur de section

- Séance N°1 : - Problème N°1
- Séance N°2 : - Problème N°2
- Problème N°3
- Séance N°3 : - Problème N°5
- Problème N°7
- Séance N°4 : - Problème N°7
- Problème N°9

✓ Devoir N°1 : (1h30 – 2h pour 1/3 temps) Torseurs de cohésion (plan et espace)

### Chapitre : Traction/compression

- Séance N°5 : - Problème N°10
- Problème N°11
- Séance N°6 : - Problème N°11
- Problème N°14

### Chapitre : Hyperstatisme et treillis

- Séance N°7 : - Problème N°17
- Problème N°18
- Devoir N°2 : (1h30 – 2h pour 1/3 temps) Traction/compression et treillis

### Chapitre : Cisaillement

- Séance N°8 : - Problème N°21
- Problème N°22
- Séance N°9 : - Problème N°25
- Problème N°26

### Chapitre : Synthèse

- Séance N°10 : - Problème N°28
- ✓ Devoir SAE 2.23 : (1h30 – 2h pour 1/3 temps) DDS S2, Méca S1 et Sdm S1

Nota :

- Des éléments de corrections sont disponibles sur le site du laboratoire de DDS  
(<http://dds.univ-lyon1.fr/>)

### Absence à un devoir

En cas d'absence à un devoir :

- Si votre absence est justifiée par la direction des études, vous avez une semaine à compter de la date du devoir pour demander par mail ([benjamin.payet@univ-lyon1.fr](mailto:benjamin.payet@univ-lyon1.fr) et [djibrilla.noma@univ-lyon1.fr](mailto:djibrilla.noma@univ-lyon1.fr)) de rattraper. Il vous sera alors communiqué un horaire pour venir passer l'examen de rattrapage.
- Si votre absence n'est pas justifiée par la direction des études : 0 au devoir

## Les correspondances des liaisons en DDS - Méca - Conception

Le tableau ci-dessous donne la correspondance des notations que vous pourrez rencontrer tout au long des modules de DDS pour la résolution de problèmes plans :

Nom de la liaison	Symbole DDS	Symbole normalisé
Appui simple		
Articulation		
Encastrement		
Appui plan		

## Méthodologie pour la recherche du point le plus sollicité d'une structure

Etape N°1 : Réalisez le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) agissant sur la structure.

Etape N°2 : Déplacez (méthode du bras de levier ou Varignon) l'ensemble des actions mécaniques extérieures au point où il y a le plus grand nombre d'inconnues.

Etape N°3 : Appliquez le PFS :

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow s}} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M_{ext \rightarrow s}} = \vec{0} \end{cases}$$

Etape N°4 : Etablir pour chaque tronçon de poutre le torseur des actions internes (torseur de section)

Etape N°5 : Tracez sur un diagramme chaque sollicitation en fonction de la longueur du tronçon. Incrire les valeurs extrêmes.

Etape N°6 : Déduire graphiquement le point le plus sollicité

Nota : Cette méthodologie marche toujours, mais dès fois on peut aller plus vite

## Torseur de cohésion

## ★ Problème N°1 : Etude d'escalier suspendu

On modélise une marche d'escalier comme une poutre rectangulaire en porte-à-faux, encastrée dans le mur (en  $x = 0$ ) et libre à l'extrémité (en  $x = L$ ).

On cherche à étudier les efforts internes induits par l'application du poids d'un individu, modélisé par une force verticale (notée  $\vec{F}$ ) appliquée à une distance «  $a$  » du mur.

Données du problème :

- Longueur de la marche :  $L = 1$  m
- Poids de l'individu :  $\vec{F} = -200 \vec{y}$  [N]
- Section rectangulaire :  $l = 0,19$  m ;  $h = 0,04$  m



Figure N°1 : Vue de l'escalier

**Question N°1 :** La théorie des poutres est-elle applicable à cette situation ? Justifiez votre réponse.

**Question N°2 :** Proposez une modélisation plane de la poutre en fonction des paramètres  $F$ ,  $L$  et  $a$  ( $a$  étant la position du point d'application de la force par rapport à l'encastrement).

Pour la suite, on considère que la force  $F$  est appliquée à l'extrémité libre ( $a = L$ ).

**Question N°3 :** Quelle est la signification physique d'un torseur de section dans une section ? Donnez sa représentation sous forme de torseur.

**Question N°4 :**

- a) Déterminez les composantes du torseur de section dans la marche en utilisant l'expression du torseur « amont » en fonction de  $F$ ,  $L$  et  $a$ .  
*Faire un schéma de la partie isolée et représenter les actions mécaniques extérieures.*
- b) Déterminez les composantes du torseur de section dans la marche en utilisant l'expression du torseur « aval » en fonction de  $F$ ,  $L$  et  $a$ .  
*Faire un schéma de la partie isolée et représenter les actions mécaniques extérieures.*
- c) Comparez les réponses aux questions précédentes et concluez.

**Question N°5 :** Tracez l'évolution des composantes du torseur de cohésion  
*Diagramme des efforts internes le long de la poutre.*

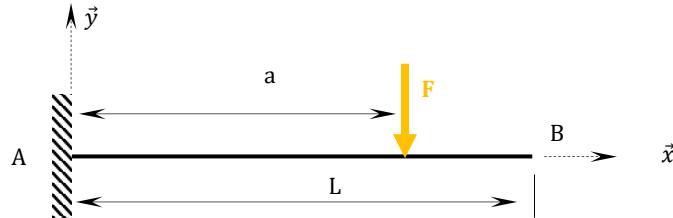
**Question N°6 :** Quel est le point le plus sollicité de la poutre ? Quel est l'intérêt de l'identifier ?

### CORRECTION

**Question N°1 :** Oui il est possible d'étudier cette structure du point de vue de la théorie des poutres car une des dimensions (la longueur «  $L$  » de la poutre, ici 1 mètre) est

grande (rapport supérieur à 5) devant les deux autres (les dimensions transversales,  $l = 190 \text{ mm}$  et  $h = 40 \text{ mm}$ ).

Question N°2 : La modélisation retenue est celle de la poutre console ou « encastrée libre » :



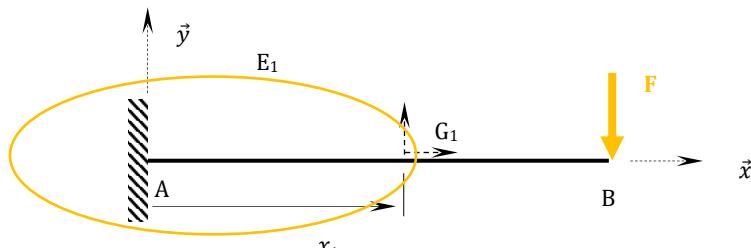
Prendre une modélisation qui confond l'extrémité de la poutre et le point d'application de l'effort permet d'obtenir la configuration la plus dimensionnante. En effet le « bras de levier » est ici maximum.

Question N°3 : Le torseur de section (ou autrement dit torseur de cohésion ou torseur des efforts intérieurs) modélise l'action mécanique exercée par le tronçon aval ( $E_2$ ) de la poutre sur le tronçon amont ( $E_1$ ), de part et d'autre d'une coupure fictive. Il représente les actions internes de la poutre. Ce torseur est exprimé au point G, centre de la section, dans le repère local R lié à la poutre.

$$\begin{aligned} \{\tau_{int}\}_{G,R} &= \begin{Bmatrix} N_x & M_{tx} \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G,R} \\ &= \begin{Bmatrix} \text{effort normal suivant } \vec{x} & \text{Moment de torsion suivant } \vec{x} \\ \text{effort tranchant suivant } \vec{y} & \text{Moment fléchissant suivant } \vec{y} \\ \text{effort tranchant suivant } \vec{z} & \text{Moment fléchissant suivant } \vec{z} \end{Bmatrix}_{G,R} \end{aligned}$$

Question N°4 : a) En utilisant le torseur « amont » ou la partie «  $E_1$  »

L'utilisation de cette partie de la poutre demande de connaître les efforts extérieurs en A :



Ainsi :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1} = -\{\tau_A\}_{G_1}$$

Ici, le torseur des actions extérieures en A est inconnu. Il convient de le calculer à partir du PFS.

1°/BAME

$$\{\tau_A\}_{A,R} = \begin{Bmatrix} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & N_A \end{Bmatrix}_{A,R} ; \{\tau_B\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F & - \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$$

2°/ On déplace l'ensemble des torseurs au même point de réduction (ici en B)

$$\{\tau_B\}_{A,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -FL \end{pmatrix}_{A,R} \text{ en effet } \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{(\tau_B)}} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -FL \end{pmatrix}$$

3°/ On applique le PFS

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow s}} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{ext \rightarrow s}} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X_A &= 0[N] \\ Y_A &= F[N] \\ N_A &= FL[Nm] \end{aligned}$$

Il est maintenant possible de rechercher le torseur des actions intérieures :

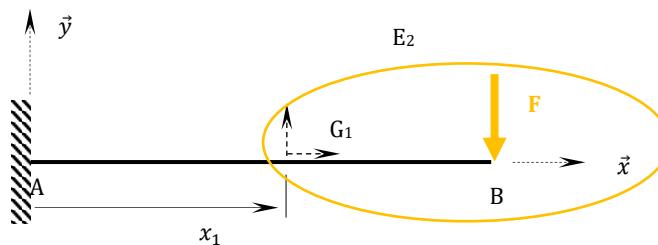
$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1,R} = -\{\tau_A\}_{G_1,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L - x_1) \end{pmatrix}_{G_1,R} [N,Nm]$$

$$\text{Car : } \{\tau_A\}_{G_1,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(L - x_1) \end{pmatrix}_{A,R}$$

$$\text{en effet } \overrightarrow{M_{G_1}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{G_1 A} \wedge \overrightarrow{R_{(\tau_A)}} = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 \\ 0 & 0 \\ FL & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ FL - Fx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant le torseur « aval » ou la partie « E2 »

L'utilisation de cette partie de la poutre évite le calcul des efforts extérieurs en A :

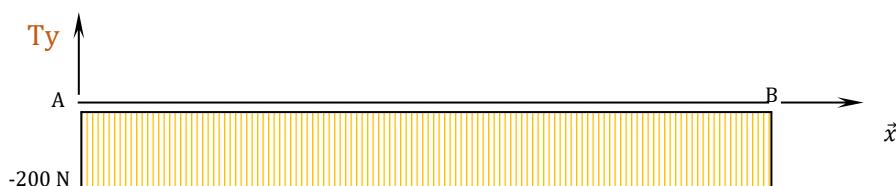


Ainsi :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L - x_1) \end{pmatrix}_{G_1,R} [N,Nm]$$

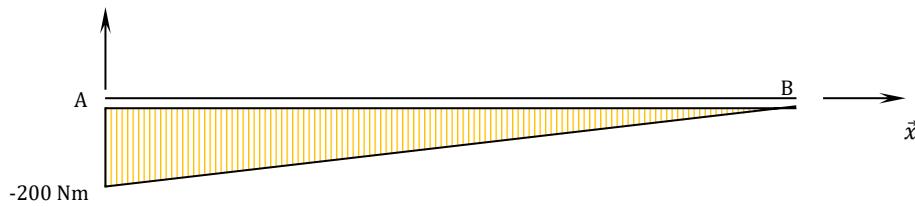
c) Isoler la partie amont ou aval a mené au même résultat. Cependant, il est préférable de considérer le tronçon avec le moins d'inconnues et le moins de calcul.

Question N°5 : Le diagramme pour l'effort tranchant selon y est :



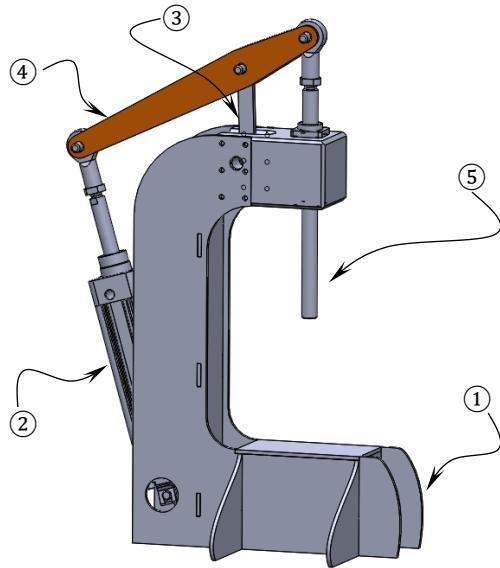
Le diagramme pour le moment fléchissant suivant z est :

Mfz



Question N°6 : Le point le plus sollicité est le point A. Il permettra d'identifier la section critique qui servira pour le dimensionnement.

## ★ ★ Problème N°2 : Etude d'une presse à levier



Une presse pneumatique (figure N°1) est un outil pouvant servir à différents travaux de montage/démontage (roulement, palier...) ou de marquage. Cette presse se compose d'un bâti (1), d'un vérin pneumatique (2), d'une biellette (3), d'un levier (4) et d'un jonc porte outils (5).

On se propose d'étudier le dimensionnement du levier (4) à partir de la modélisation présentée par la figure N°2. Le levier est en équilibre sous l'action d'une liaison pivot en A, d'un effort résultant de l'action de la biellette en B (équivalent à une liaison ponctuelle dont la normale est inclinée d'un angle  $\alpha$  avec l'horizontale) et de l'effort exercé par le vérin en C. Les liaisons sont considérées sans jeu et sans frottement.

Figure N°1 : Vue de la presse

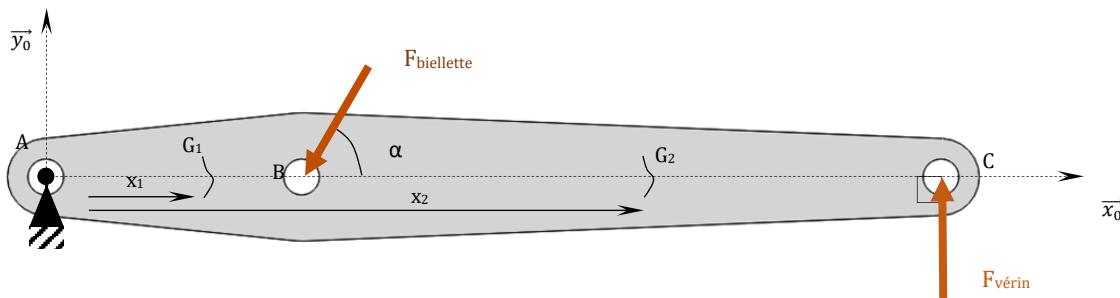


Figure N°2 : Modélisation de la presse

Les données du problème sont les suivantes (les distances sont en [mm] et les efforts en [kN]) :

$$- \overrightarrow{AB} = 100 \overrightarrow{x_0} \quad - \overrightarrow{BC} = 250 \overrightarrow{x_0} \quad - \overrightarrow{F_{vérin}} = F_{vérin} \overrightarrow{y_0}$$

**Question N°1 :** Déterminez les efforts de liaison au point A ainsi que la valeur de  $F_{biellette}$  en fonction des données du problème.

**Question N°2 :** Déterminez les composantes du torseur de section dans le levier en utilisant seulement l'expression du torseur « amont ».

**Question N°3 :** Tracer les variations du torseur de section le long de la poutre [ABC] pour  $F_{\text{vérin}} = 785,4\text{N}$  et  $\alpha = 76,8^\circ$ .

**Question N°4 :** Quel est le point le plus sollicité de la poutre ?

### CORRECTION

Question N°1 : Isolons l'ensemble de la poutre. Le BAME donne :

$$\{\tau_A\}_{A,R_0} = \begin{pmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{pmatrix} -F_{\text{bielle}} \cdot \cos \alpha & 0 \\ -F_{\text{bielle}} \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_C\}_{C,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{\text{vérin}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{C,R_0}$$

On déplace l'ensemble des torseurs au même point de réduction (ici en A, car plus grand nombre d'inconnues) :

$$\{\tau_B\}_{A,R_0} = \begin{pmatrix} -F_{\text{bielle}} \cdot \cos \alpha & 0 \\ -F_{\text{bielle}} \cdot \sin \alpha & 0 \\ 0 & -0,1 \cdot F_{\text{bielle}} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}_{A,R_0} ; \{\tau_C\}_{A,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{\text{vérin}} & 0 \\ 0 & 0,35 \cdot F_{\text{vérin}} \end{pmatrix}_{A,R_0}$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_A - F_{\text{bielle}} \cdot \cos \alpha = 0 \\ Y_A - F_{\text{bielle}} \cdot \sin \alpha + F_{\text{vérin}} = 0 \\ 0,35 \cdot F_{\text{vérin}} - 0,1 \cdot F_{\text{bielle}} \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = \frac{3,5 \cdot F_{\text{vérin}}}{\tan \alpha} \\ Y_A = 2,5 \cdot F_{\text{vérin}} \\ F_{\text{bielle}} = \frac{3,5 \cdot F_{\text{vérin}}}{\sin \alpha} \end{cases}$$

Question N°2 : L'étude de la poutre se divise en deux parties :

- Etude du tronçon ]AB[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1,R_0} = -\{\tau_A\}_{G_1,R_0} = \begin{pmatrix} -\frac{3,5 \cdot F_{\text{vérin}}}{\tan \alpha} & 0 & 0 \\ -2,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 & 0 \\ 0 & x_1 \cdot 2,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 \end{pmatrix}_{G_1,R_0}$$

- Etude du tronçon ]BC[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2,R_0} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_2,R_0} = -(\{\tau_A\}_{G_2,R_0} + \{\tau_B\}_{G_2,R_0})$$

Avec :

$$\{\tau_A\}_{G_2,R_0} = \begin{pmatrix} \frac{3,5 \cdot F_{\text{vérin}}}{\tan \alpha} & 0 & 0 \\ 2,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 \cdot 2,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 \end{pmatrix}_{G_2,R_0}$$

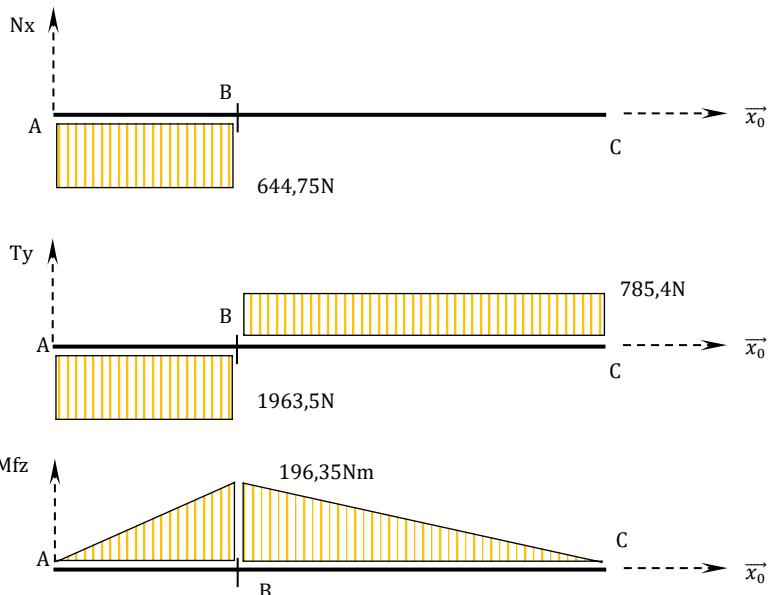
Et :

$$\{\tau_B\}_{G_2,R_0} = \begin{pmatrix} -\frac{3,5 \cdot F_{\text{vérin}}}{\tan \alpha} & 0 & 0 \\ -3,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 & 0 \\ 0 & (x_2 - 0,1)3,5 \cdot F_{\text{vérin}} & 0 \end{pmatrix}_{G_2,R_0}$$

Finalement :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2, R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & F_{\text{vérin}}(0,35 - x_2) \end{Bmatrix}_{G_2, R_0}$$

Question N°3 :



Question N°4 : Le point B est le plus sollicité.

### ★ ★ Problème N°3 : Etude d'une plateforme volante

Les plateformes volantes sont de plus en plus répandues à travers le monde. Au-delà de leur utilité déjà bien connue dans le domaine cinématographique elles ont aujourd'hui un avenir prometteur dans la livraison de colis postaux ou dans le secours à la personne. Le matériel présenté figure N°1 pèse près de 1,5 kg et permet d'embarquer une charge utile de 4,5kg (figure N°2) pour une autonomie totale de vol allant jusqu'à 25 min.



Figure N°1 : Plateforme volante de chez DJI®



Figure N°2 : Plateforme avec charge

Cet exercice propose d'étudier lors d'un vol stationnaire les efforts induits par une hélice sur le bras qui la relie au châssis. Un ensemble de mesures permet de donner les paramètres suivants :

- Longueur du bras : 300mm
- Diamètre du bras : 10mm
- Effort de portance d'une hélice : 10N
- Puissance d'un moteur : 60W à 12000 tr.min<sup>-1</sup>

**Question N°1 :** Déterminez le couple induit par la rotation d'une hélice sur son bras de fixation.

**Question N°2 :** Proposez (schémas, ...) une modélisation poutre du problème.

**Question N°3 :** Déterminez les composantes du torseur de section dans un bras de fixation et tracez leurs évolutions.

**Question N°4 :** Quel est le point le plus sollicité de la poutre ?

### CORRECTION

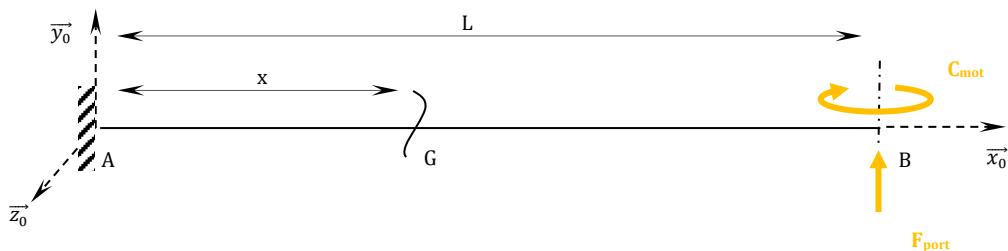
Question N°1 : On donne la formule suivante :

$$P = C \cdot \omega$$

Donc :

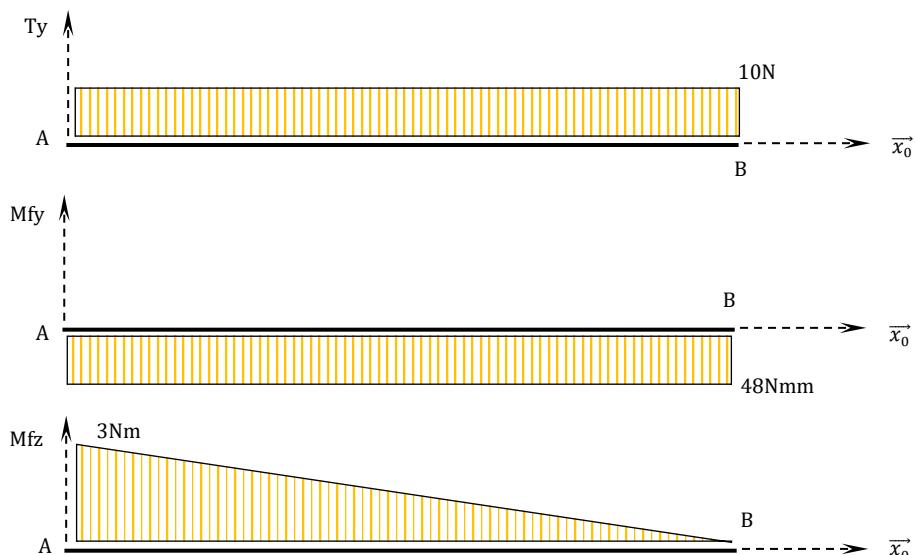
$$C = \frac{P}{\omega} = \frac{60 \cdot 30}{\pi \cdot 12000} = 0,048 \text{ Nm} \text{ soit } 48 \text{ Nmm}$$

Question N°2 :



Question N°3 : Etude du tronçon ]AB[ pour  $0 < x < L$  [mm] :

$$\{\tau_{int}\}_{G,R_0} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G,R_0} = \{\tau_B\}_{G,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{port} & -C_{mot} \\ 0 & F_{port}(L-x) \end{Bmatrix}_{G,R_0} [N, Nmm]$$



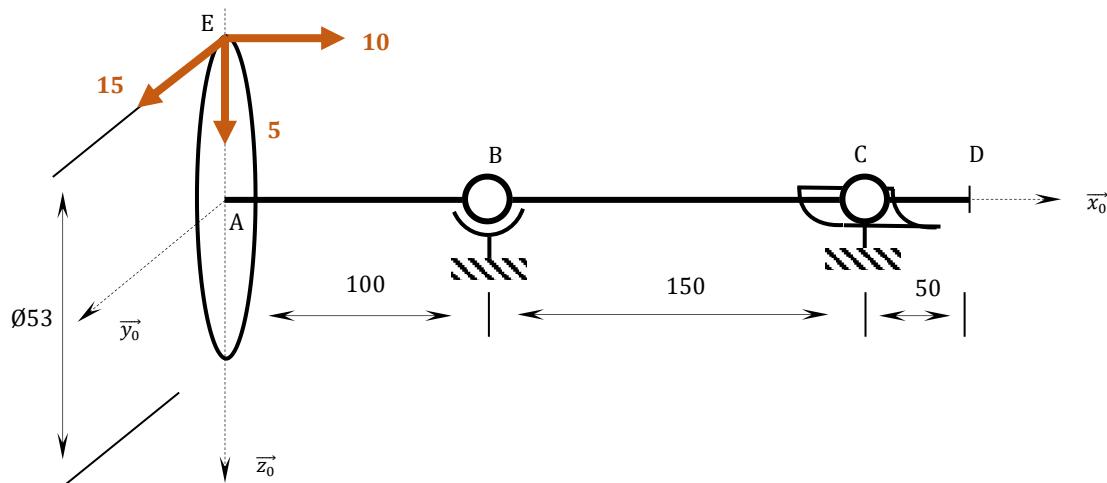
Question N°4 : Le point le plus sollicité est le point A

## ★★★ Problème N°4 : Etude de l'arbre d'attaque d'un différentiel

La figure ci-contre représente un différentiel à denture spiro-coniques. Cet ensemble mécanique équipe actuellement l'ensemble des véhicules routiers et leur permet de prendre un virage sans risque de dérapage. L'arbre d'attaque modélisé ci-après est en équilibre sous l'action, en B et C des réactions exercées par les roulements, en E des efforts exercés par la roue sur le pignon et en D du couple moteur. Les cotes sont en [mm], les forces en [kN].



Figure N°1 : Différentiel automobile



En considérant la liaison induite par le roulement en C comme une liaison sphère/cylindre (liaison linéaire annulaire) et la liaison induite par le roulement B comme une liaison sphère /sphère (liaison rotule ou sphérique), répondre aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Calculez, dans le repère  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et en réduisant le torseur en B, les composantes des réactions en B et C exercées par les roulements sur l'arbre (en kN) et le couple moteur en D (en Nm).

**Question N°2 :** Déterminez les expressions des composantes du torseur de section le long de la poutre, tracez leurs variations et donnez le point le plus sollicité.

## CORRECTION

Question N°1 : Il convient, dans un premier temps de réaliser le BAME :

$$\{\tau_E\}_{E,R_0} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}_{E,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{pmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{pmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_C\}_{C,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{pmatrix}_{C,R_0} ; \{\tau_D\}_{D,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{D,R_0}$$

On déplace l'ensemble des torseurs au point B, car c'est en ce point qu'il y a le plus grand nombre d'inconnues :

$$\{\tau_E\}_{B,R_0} = \begin{pmatrix} 10 & 397,5 \\ 15 & 235 \\ 5 & -1500 \end{pmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_C\}_{B,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & -150 \cdot Z_C \\ Z_C & 150 \cdot Y_C \end{pmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_D\}_{B,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B,R_0}$$

L'application du PFS donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 + X_B = 0 \\ 15 + Y_B + Y_C = 0 \\ 5 + Z_B + Z_C = 0 \\ 397,5 + C_m = 0 \\ 235 - 150 \cdot Z_C = 0 \\ -1500 + 150 \cdot Y_C = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_B = -10 \text{ kN} \\ Y_B = -25 \text{ kN} \\ Z_B = -6,57 \text{ kN} \\ C_m = -397,5 \text{ Nm} \\ Z_C = 1,57 \text{ kN} \\ Y_C = 10 \text{ kN} \end{array} \right.$$

Question N°2 : Il convient de réaliser l'étude de trois tronçons.

- Tronçon ]AB[ pour  $0 < x_1 < 100$  [mm] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R_1} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1,R_1} = -\{\tau_E\}_{G_1,R_1} = \begin{pmatrix} -10 & -397,5 \\ -15 & 265 - 5 \cdot x_1 \\ -5 & 15 \cdot x_1 \end{pmatrix}_{G_1,R_1} [\text{kN}, \text{Nm}]$$

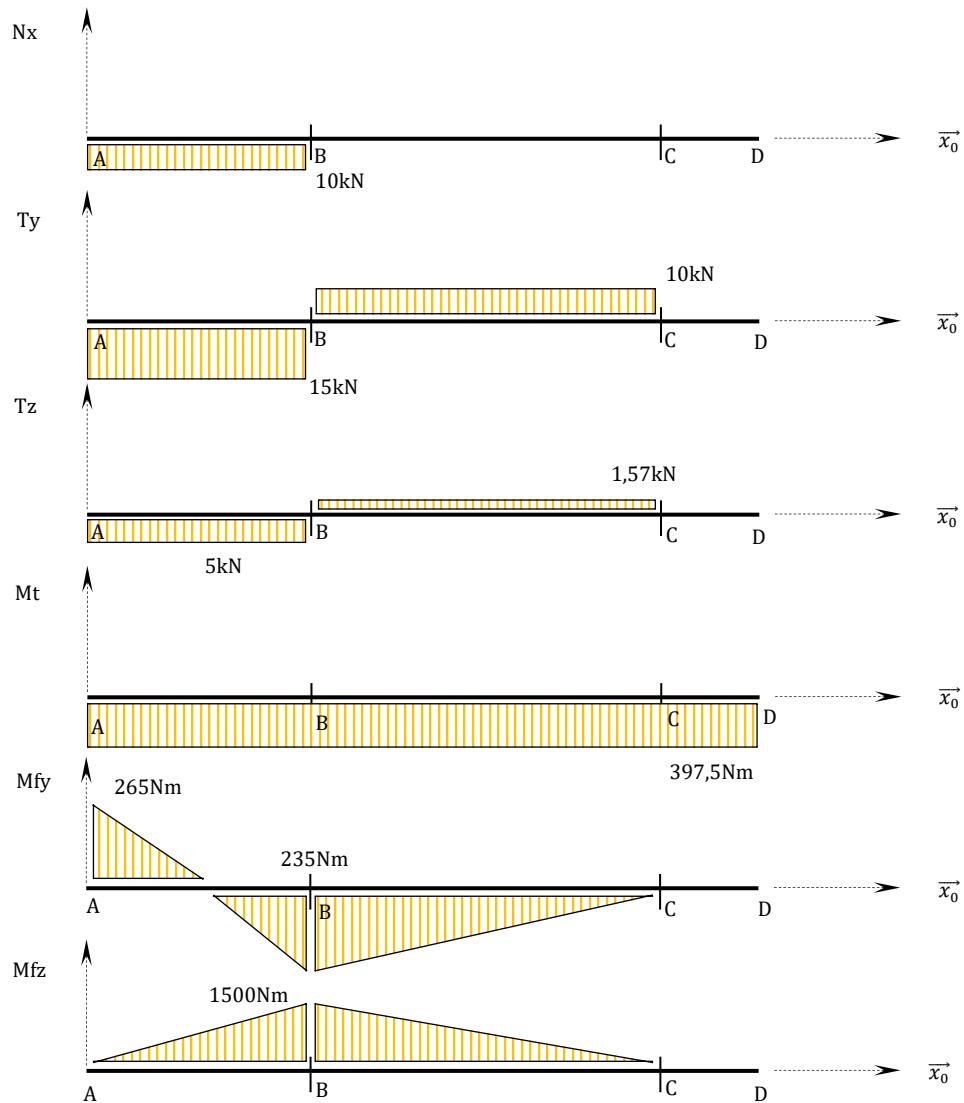
- Tronçon ]BC[ pour  $100 < x_2 < 250$  [mm] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2,R_2} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_2,R_2} = [\{\tau_C\}_{G_2,R_2} + \{\tau_D\}_{G_2,R_2}] = \begin{pmatrix} 0 & -397,5 \\ 10 & -1,57 \cdot (250 - x_2) \\ 1,57 & 10 \cdot (250 - x_2) \end{pmatrix}_{G_2,R_2} [\text{kN}, \text{Nm}]$$

- Tronçon ]CD[ pour  $250 < x_3 < 300$  [mm] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_3,R_3} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_3,R_3} = \{\tau_D\}_{G_3,R_3} = \begin{pmatrix} 0 & -397,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G_3,R_3} [\text{kN}, \text{Nm}]$$

### Diagrammes des sollicitations :



Finalement, le point le plus sollicité est le point B.

### ★★★ Problème N°5 : Etude d'une potence de manutention

Les potences de manutention (figure N°1) sont des structures métalliques qu'il est possible de retrouver dans de nombreux ateliers. Elles se composent d'un pilier de longueur  $l=4m$  (pièce ①) solidement arrimé au sol et d'un bras de longueur  $L=4m$  (pièce ②) sur lequel sera fixé un palan (pièce ③).

L'étude propose d'analyser les efforts induits sur le bras par une charge (notée  $F$ ) appliquée à une distance (notée  $a$ ) du pilier.

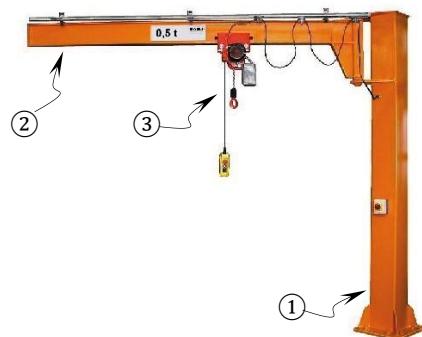


Figure N°1 : Vue d'une potence de manutention

On considère la modélisation suivante :

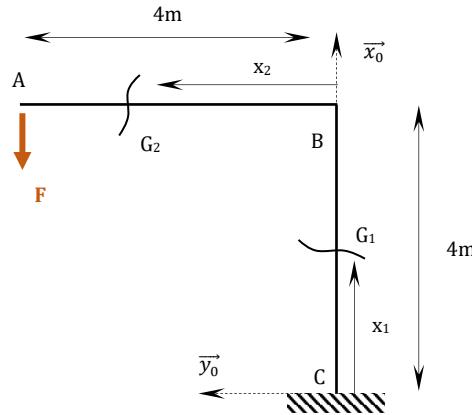


Figure N°2 : Modélisation complète de la potence de manutention

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

**Question N°1 :** A l'aide du PFS, déterminez les actions de liaison au point C dans le repère  $(0 ; x_0 ; y_0)$ . On considérera que l'effort est placé en bout de poutre.

**Question N°2 :** Déterminez les composantes du torseur de section le long de la poutre [CBA] en utilisant la méthode de votre choix.

**Question N°3 :** Tracez l'évolution des composantes du torseur de cohésion.

### CORRECTION

Question N°1 : Le PFS permet de donner le résultat suivant et ce en isolant l'ensemble de la poutre CBA :

$$\{\tau_C\}_{C,R_0} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -FL \end{Bmatrix}_{C,R_0}$$

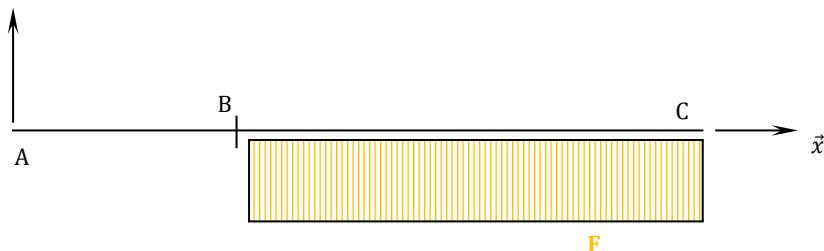
Question N°2 : Etude du tronçon] CB[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R_1} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1,R_1} = \{\tau_A\}_{G_1,R_1} = \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & FL \end{Bmatrix}_{G_1,R_1} [N, Nm]$$

Etude du tronçon] BA[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2,R_2} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_2,R_2} = \{\tau_A\}_{G_2,R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(L - x_2) \end{Bmatrix}_{G_2,R_2} [N, Nm]$$

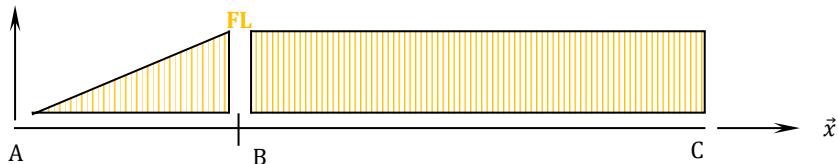
Question N°3 : Nx :



Ty :



M<sub>fz</sub> :



### ★★★★★ Problème N°6 : Etude d'une clé à pipe débouchée

La clé à pipe est un outil à main couramment utilisé dans les ateliers de mécanique ou à la maison. Elle permet de serrer et desserrer des vis HC ou des écrous (cf. figure N°1).

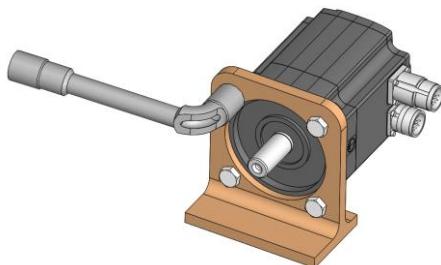


Figure N°1 : Vue d'un assemblage vissé

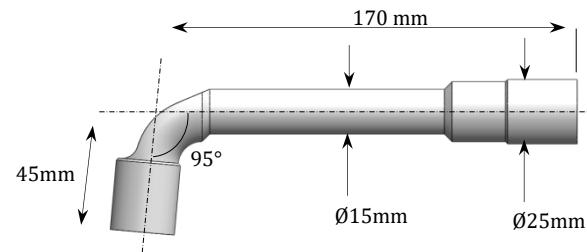
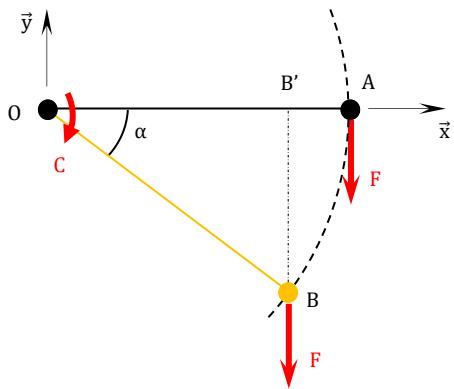


Figure N°2 : Vue d'une clé à pipe lors de son utilisation

On se propose d'étudier le comportement de cet outil lors de son utilisation. La vis est considérée comme complètement « grippée ». Pour en venir à bout, l'utilisateur se sert de tout son poids (90kg) en se suspendant à la clé. Ses caractéristiques sont décrites en figure N°2 :

- Question N°1 :** Dans quelle position vaut-il mieux placer la clé pour que l'efficacité du poids soit maximale ? A quel endroit de la clé vaut-il mieux appliquer la charge ?
- Question N°2 :** Proposez (schémas, ...) une modélisation poutre du problème. Quelles sont vos hypothèses ?
- Question N°3 :** Déterminez les composantes du torseur de section dans chacun des éléments de poutres du système et tracez leurs évolutions. Quel est le point le plus sollicité ?
- Question N°4 :** Quel sera alors la valeur du couple utile au desserrage de la vis ?

## Correction



Question N°1 : La clé doit être positionnée à l'horizontale afin que le bras de levier soit le plus grand possible. En effet, lorsque la clé est dans la position N°1, le bras de levier est donné par le segment [OA].

Dans la position N°2, représentée en orange le bras de levier diminue. Il est ainsi donné par le segment [OB']. Or  $OB' = OB \cdot \cos\alpha$ .

Cette dernière équation montre que le bras de levier maximum est atteint pour  $\alpha=0$ . De la même façon, plus la charge est appliquée loin de l'écrou à desserrer plus le moment généré sur ce dernier sera important. Il convient alors d'appliquer l'effort en bout de clé.

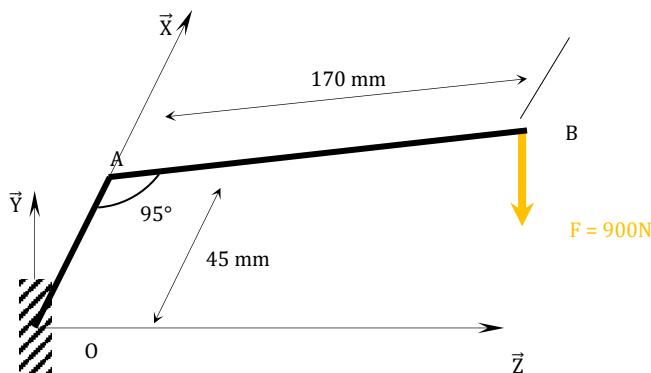
Question N°2 : Les hypothèses du problème sont :

- Poutre de section constante. On néglige pour cela les variations de section le long de la clé.
- La clé est considérée comme étant encastrée au niveau de la tête de vis.
- La clé est parfaitement horizontale.
- La charge est considérée comme ponctuelle et appliquée à l'extrémité de la clé (cas le plus défavorable).

Remarque sur les limites du modèle poutre :

- On ne traite pas ce qui est local. Ainsi :
  - o On se place dans le cas théorique d'un écrou de hauteur nulle car on ne connaît pas à priori le contact entre l'écrou et la clé. En effet quel que soit la façon dont le contact s'opère entre l'écrou et la clé le torseur de section reste le même. Typiquement, si on suspend 100N au bout d'une corde, peu importe qu'il n'y est qu'un ou plusieurs nœuds au niveau du crochet. C'est toujours 100N qui « passent » dans la corde.
  - o On ne s'intéresse pas au raccordement entre OA et AB.

Ainsi, l'exercice peut être modélisé de la façon suivante dans le repère  $R(0 ; \vec{X} ; \vec{Y} ; \vec{Z})$  :



Question N°3 : Il convient, dans une première partie de déterminer les actions de liaison au point 0. Il s'agit ici d'un encastrement. Ainsi le torseur des actions mécaniques transmissibles s'écrit :

$$\{\tau_O\}_{O,R} = \begin{Bmatrix} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{Bmatrix}_{O,R}$$

De plus le torseur des actions mécaniques au point B s'écrit :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -900 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$$

L'application du principe fondamental de la statique en résultante permet d'écrire :

$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O - 900 = 0 \\ Z_O = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O = 900 \text{ N} \\ Z_O = 0 \end{cases}$$

Afin d'appliquer le PFS en moment, il convient à présent d'exprimer le torseur  $\{\tau_B\}$  au point O :

$$\{\tau_B\}_{B,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -900 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R} \Rightarrow \{\tau_B\}_{O,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 152460 \\ -900 & 0 \\ 0 & -53820 \end{Bmatrix}_{O,R}$$

En effet :

$$\overrightarrow{M_{\{\tau_B\}_O}} = \overrightarrow{M_{\{\tau_B\}_B}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_{\{\tau_B\}}} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 45 + 170 \cdot \cos 85 & 0 & 0 \\ 0 & 170 \cdot \sin 85 & 0 \\ 170 \cdot \sin 85 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -900 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152460 \\ 0 \\ -53820 \end{Bmatrix} \text{ N.mm}$$

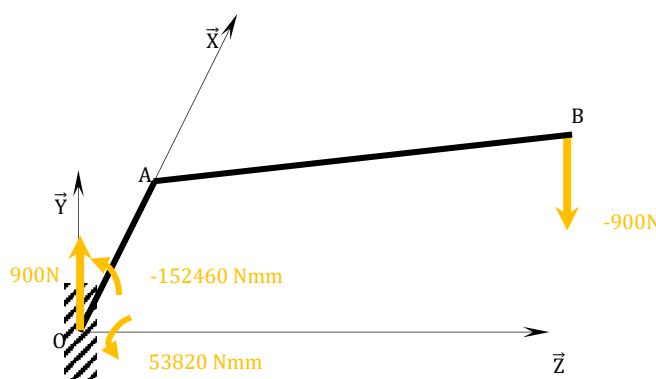
Ainsi, l'application du PFS en moment donne :

$$\begin{cases} L_O + 152460 = 0 \\ M_O = 0 \\ N_O - 53820 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_O = -152460 \\ M_O = 0 \\ N_O = 53820 \end{cases} \text{ N.mm}$$

Finalement :

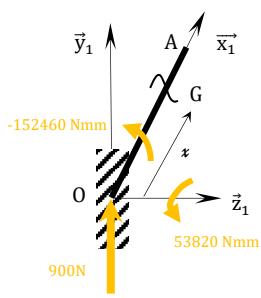
$$\{\tau_O\}_{O,R} = \begin{Bmatrix} 0 & -152460 \\ 900 & 0 \\ 0 & 53820 \end{Bmatrix}_{O,R}$$

En représentant le système avec l'ensemble des efforts qui viennent d'être déterminés, cela donne :



Connaissant l'ensemble des efforts dans la structure, il est maintenant possible de calculer le torseur de cohésion (torseur des actions intérieures) pour chacun des tronçons.

Ainsi pour le tronçon [OA] avec  $0 < x < 45\text{mm}$  :



$$\{\tau_{int}\}_{G,R_1} = -\{\tau_{Ext \rightarrow E_1}\}_{G,R_1}$$

De plus :

$$\{\tau_{Ext \rightarrow E_1}\}_{G,R_1} = \{\tau_O\}_{G,R_1}$$

Ainsi en exprimant le torseur  $\{\tau_O\}$  au point G, il vient :

$$\{\tau_O\}_{G,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & -152460 \\ 900 & 0 \\ 0 & 53820 - 900x \end{Bmatrix}_{G,R_1}$$

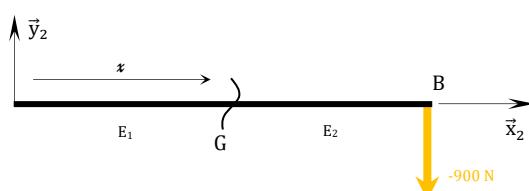
En effet :

$$\overrightarrow{M_{\{\tau_O\}_G}} = \overrightarrow{M_{\{\tau_O\}_O}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{R_{\{\tau_O\}}} = \begin{Bmatrix} -152460 \\ 0 \\ 53820 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 900 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -152460 \\ 0 \\ 53820 - 900x \end{Bmatrix} \text{ N.mm}$$

Finalement :

$$\{\tau_{int}\}_{G,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 152460 \\ -900 & 0 \\ 0 & -53820 + 900x \end{Bmatrix}_{G,R_1}$$

Pour le tronçon [AB] avec  $0 < x < 170\text{mm}$  :



$$\{\tau_{int}\}_{G,R_2} = \{\tau_{Ext \rightarrow E_2}\}_{G,R_2}$$

De plus :

$$\{\tau_{Ext \rightarrow E_2}\}_{G,R_2} = \{\tau_B\}_{G,R_2}$$

Ainsi en exprimant le torseur  $\{\tau_B\}$  au point G, il vient :

$$\{\tau_B\}_{G,R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -900 & 0 \\ 0 & -153000 + 900x \end{Bmatrix}_{G,R_2}$$

En effet :

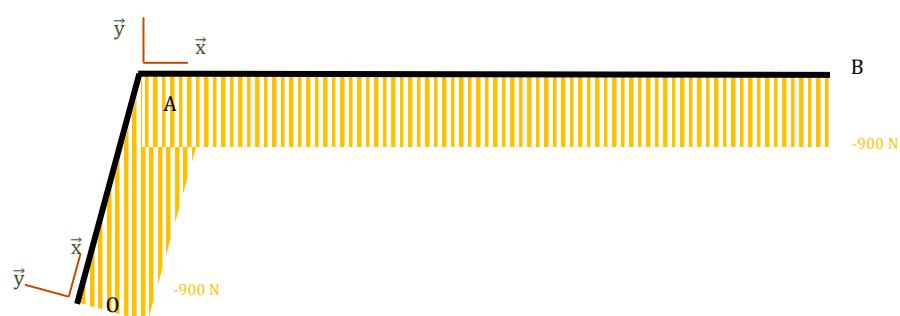
$$\overrightarrow{M_{\{\tau_B\}_G}} = \overrightarrow{M_{\{\tau_B\}_B}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{R_{\{\tau_B\}}} = \vec{0} + \begin{Bmatrix} 170 - x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -900 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -153000 + 900x \end{Bmatrix} \text{ N.mm}$$

Finalement :

$$\{\tau_{int}\}_{G,R_2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -900 & 0 \\ 0 & -153000 + 900x \end{Bmatrix}_{G,R_2}$$

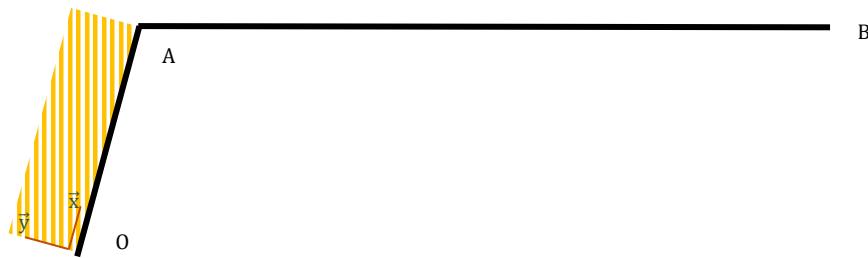
La représentation des différentes sollicitations dans chacun des tronçons donne :

Pour l'effort tranchant  $T_Y$  :

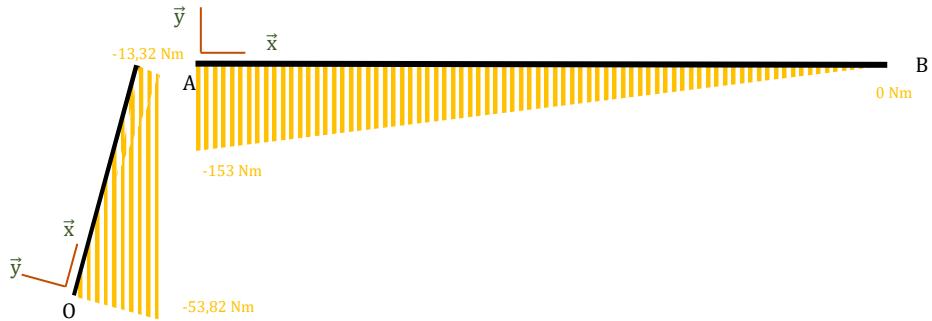


Pour le moment de torsion  $M_T$  :

152,46 Nm



Pour le moment fléchissant  $M_f_z$ :



Question N°4 : Le couple utile au desserrage de la vis sera de 152,46 Nm.

Remarque : Il est possible de constater que l'ensemble du moment fléchissant généré sur [AB] n'est pas transformé en moment de torsion utile à desserrer la vis. Cela est dû à l'angle ( $>90^\circ$ ) formé entre la jonction des deux poutres. Cet angle permet notamment d'éloigner la main de l'opérateur de l'ensemble à démonter.



### Problème N°7 : Etude d'un lit pour chat-pacha



Figure N°1 : Vue d'un support pour chat

Le chat est un animal dont la domestication a débuté en 9800 avant notre ère. Aujourd'hui encore le chat reste un animal très indépendant qui demande quand même un « minimum » d'attention, à savoir :

- De la nourriture de qualité
- Beaucoup de caresses
- Un fil pour jouer
- Un endroit chaud
- Un lit dans lequel passer beaucoup de temps.

On se propose de dimensionner la structure de ce dernier système. Etant donné la présence d'une symétrie, on se rapporte à la modélisation suivante :

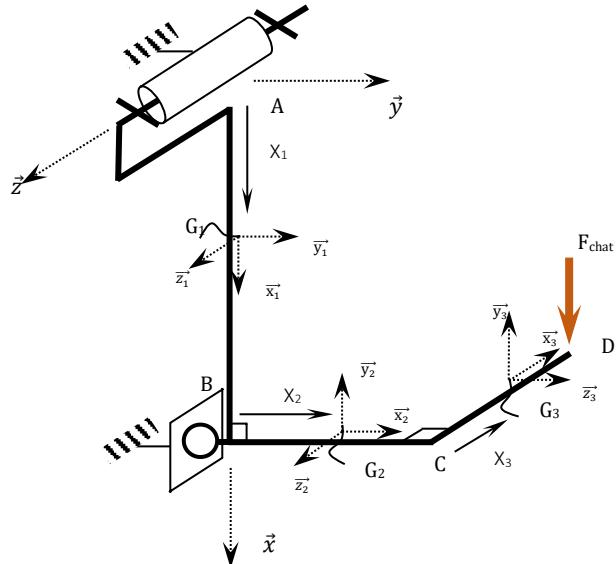


Figure N°2 : Modélisation du support pour chat

Les données du problème sont les suivantes (attention les efforts sont exprimés en N) :

- $\vec{F}_{\text{chat}} = 60 \vec{x}$
- $\|\vec{AB}\| = 400 \text{ mm}$
- $\|\vec{BC}\| = 350 \text{ mm}$
- $\|\vec{CD}\| = 300 \text{ mm}$

Les liaisons en A (pivot) et en B (ponctuelle) sont supposées parfaites et sans jeu. L'effort en D ( $F_{\text{chat}}$ ) est induit par la moitié du poids de l'animal.

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** En appliquant le principe fondamental de la statique, déterminez les actions des liaisons aux points A et B.
- Question N°2 :** Calculez les composantes des torseurs de cohésion le long de la poutre ABCD et tracez leurs variations.
- Question N°3 :** Quel est le point le plus sollicité ?

### CORRECTION

Question N°1 : Il convient, dans un premier temps de réaliser le BAME :

$$\{\tau_A\}_{A,R_0} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_0} ; \{\tau_B\}_{B,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_0} ; \{\tau_D\}_{D,R_0} = \begin{Bmatrix} F_{\text{chat}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D,R_0}$$

On déplace l'ensemble des torseurs au point A, car c'est en ce point qu'il y a le plus grand nombre d'inconnues :

$$\{\tau_B\}_{A,R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0,4 \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{A,R_0} ; \{\tau_D\}_{A,R_0} = \begin{Bmatrix} F_{\text{chat}} & 0 \\ 0 & -0,3 \cdot F_{\text{chat}} \\ 0 & -0,35 \cdot F_{\text{chat}} \end{Bmatrix}_{A,R_0}$$

L'application du PFS donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + F_{chat} = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A - 0,3 \cdot F_{chat} = 0 \\ 0,4 \cdot Y_B - 0,35 \cdot F_{chat} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_A = -60 \text{ N} \\ Y_A = -52,5 \text{ N} \\ Z_A = 0 \text{ N} \\ L_A = 0 \text{ Nm} \\ M_A = 0,3 \cdot F_{chat} = 18 \text{ Nm} \\ Y_B = \frac{0,35 \cdot F_{chat}}{0,4} = 52,5 \text{ N} \end{array} \right.$$

Question N°2 : Il convient de réaliser l'étude de trois tronçons.

- Tronçon ]AB[ pour  $0 < x_1 < 0,4$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_A\}_{G_1, R_1} = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 52,5 & -18 \\ 0 & -52,5 \cdot x_1 \end{pmatrix}_{G_1, R_1}$$

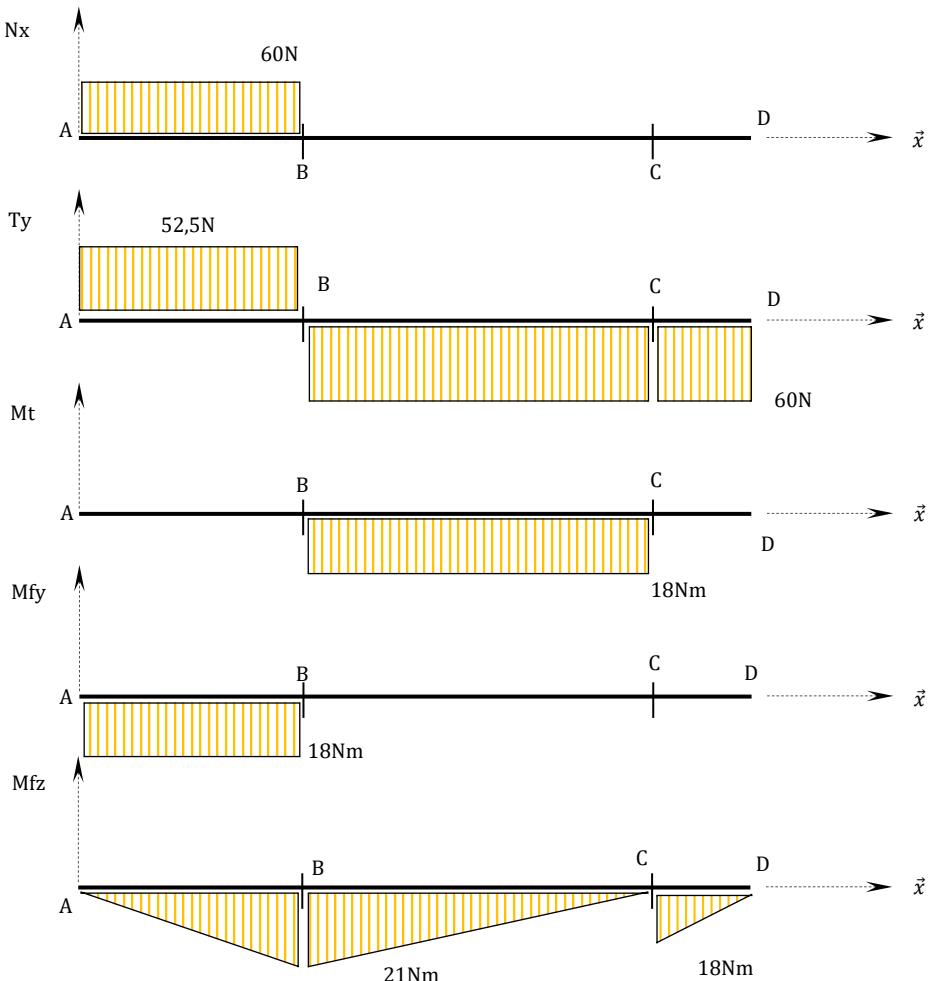
- Tronçon ]BC[ pour  $0 < x_2 < 0,35$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2, R_2} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_2, R_2} = \{\tau_D\}_{G_2, R_2} = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ -60 & 0 \\ 0 & 60 \cdot (x_2 - 0,35) \end{pmatrix}_{G_2, R_2}$$

- Tronçon ]CD[ pour  $0 < x_3 < 0,33$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_3, R_3} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_3, R_3} = \{\tau_D\}_{G_3, R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -60 & 0 \\ 0 & 60 \cdot (x_3 - 0,3) \end{pmatrix}_{G_3, R_3}$$

Les variations des différents torseurs de section donnent :



Question N°3 : Le point B semble être le plus sollicité

### ★★★ ★ Problème N°8 : Etude d'une fraiseuse de table

Une fraiseuse de table est une machine outils (cf. figure N°1) permettant de réaliser des travaux de fraisage/perçage dans des matériaux légers tels que l'aluminium, le plastique ou le bois. D'une manière générale, la puissance disponible à la broche de ces machines n'excède pas 1kW. Ce facteur est très limitant sur sa capacité (profondeur de passe, ...). On se propose d'étudier l'architecture en « col de cygne » de ce type de fraiseuse. Pour ce faire nous retiendrons la modélisation suivante :



Figure N°1 : Vue d'une fraiseuse de table OPTIMUM®

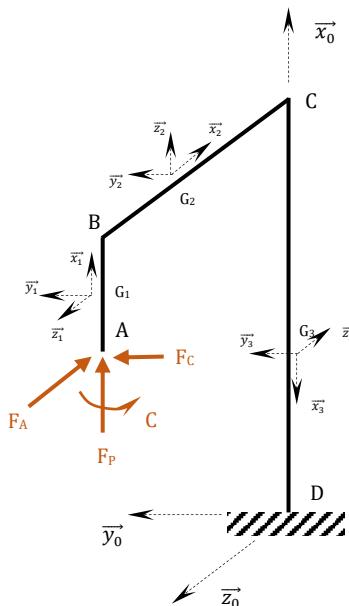


Figure N°2 : Modélisation du col de cygne

Caractéristiques géométriques de la machine :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 150 \text{ mm}$
- $\|\overrightarrow{BC}\| = 250 \text{ mm}$
- $\|\overrightarrow{CD}\| = 400 \text{ mm}$

Capacité maximale de la machine (en N) :

- $\overrightarrow{F_A} = -200 \overrightarrow{z_0}$
- $\overrightarrow{F_C} = 150 \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{F_P} = 300 \overrightarrow{x_0}$

Capacité maximale de la machine (en Nm) :

- $\overrightarrow{C} = 40 \overrightarrow{x_1}$

Répondez aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Déterminez les composantes du torseur de section le long de la poutre [ABCD] et ce, sans résoudre le problème de statique.

**Question N°2 :** Tracez l'évolution des composantes du torseur de section le long de la poutre [ABCD].

#### CORRECTION

Question N°1 : Exprimons le torseur en A dans les différents repères :

$$\{\tau_A\}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} 300 & 40 \\ 150 & 0 \\ -200 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} ; \{\tau_A\}_{A,R_2} = \begin{Bmatrix} 200 & 0 \\ 150 & 0 \\ 300 & 40 \end{Bmatrix}_{A,R_2} ; \{\tau_A\}_{A,R_3} = \begin{Bmatrix} -300 & -40 \\ 150 & 0 \\ 200 & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_3}$$

L'étude des différents tronçons donne :

- Tronçon ]AB[ pour  $0 < x_1 < 0,15$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1, R_1} = -\{\tau_A\}_{G_1, R_1} = \begin{cases} -300 & -40 \\ -150 & 200 \cdot x_1 \\ 200 & 150 \cdot x_1 \end{cases}_{G_1, R_1}$$

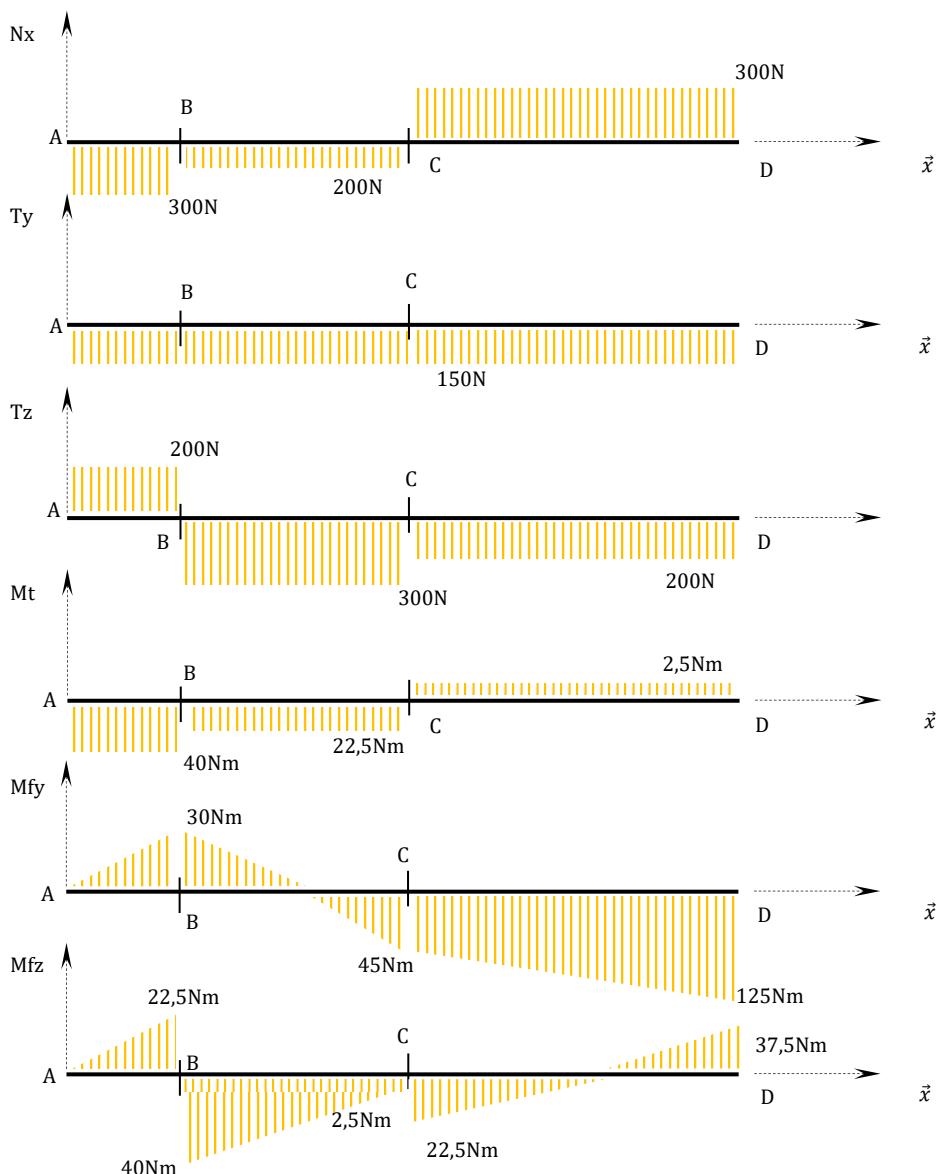
- Tronçon ]BC[ pour  $0 < x_2 < 0,25$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2, R_2} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_2, R_2} = -\{\tau_A\}_{G_2, R_2} = \begin{cases} -200 & -22,5 \\ -150 & 30 - 300 \cdot x_2 \\ -300 & -40 + 150 \cdot x_2 \end{cases}_{G_2, R_2}$$

- Tronçon ]CD[ pour  $0 < x_3 < 0,4$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_3, R_3} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_3, R_3} = -\{\tau_A\}_{G_3, R_3} = \begin{cases} 300 & 40 - 37,5 \\ -150 & -75 + 200 \cdot (0,15 - x_3) \\ -200 & -150 \cdot (0,15 - x_3) \end{cases}_{G_3, R_3}$$

Question N°2 : Les variations sont :



## ★★★ Problème N°9 : Mât de drapeau soumis au vent

Un mât de drapeau est encastré à sa base et libre à l'extrémité. Lorsqu'il est exposé au vent, il subit une pression constante le long de sa longueur, modélisée comme une charge linéique uniforme  $q$ . L'objectif est d'analyser les efforts internes et les contraintes dans le mât avec une section circulaire.



Figure N°1 : Exemple devant l'ONU

Les données du problème sont les suivantes :

- Longueur du mât :  $L = 5 \text{ m}$
- Charge linéique due au vent :  $q = 200 \text{ N/m}$
- Section circulaire :  $d = 0,1 \text{ m}$

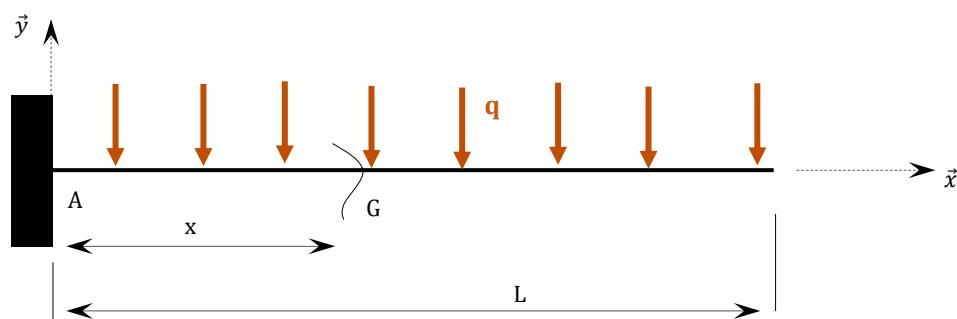
**Question N°1 :** Proposez un modèle simplifié du mât, précisez le repère et la direction de la charge.

**Question N°2 :** Déterminez le torseur de cohésion.

**Question N°3 :** Tracez l'évolution des composantes du torseur de section le long de la poutre et donnez le point le plus sollicité.

### CORRECTION

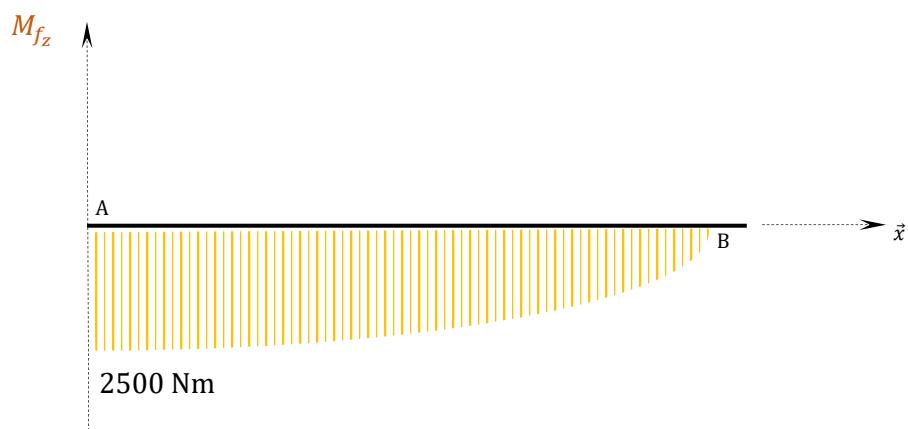
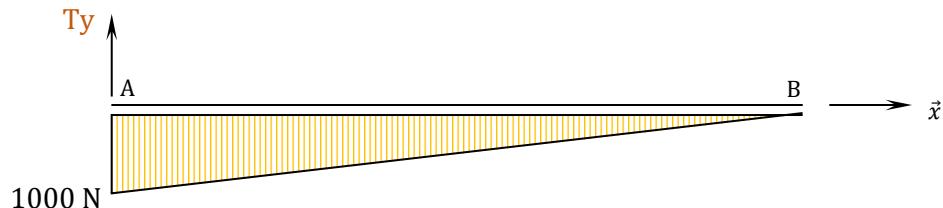
Question N°1 : Soit la modélisation retenue pour l'étude du gousset :



Question N°2 : Etude de la section sur ]AB[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E_2}\}_{G,R} = \{\tau_B\}_{G,R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(L-x) & 0 \\ 0 & \frac{-q(L-x)^2}{2} \end{pmatrix}_{G,R}$$

Question N°3 : Le diagramme pour l'effort tranchant selon y est :



Le point le plus sollicité est le point A (base du bâti)

## **Sollicitation élémentaire : Traction/compression – concentration de contrainte**

## ★ Problème N°10 : Tir à la corde

Discipline olympique de 1900 à 1920, le tir à la corde (figure N°1) oppose deux équipes dans une épreuve de force. Chacune d'elle s'aligne aux extrémités d'une corde et essaie de faire dépasser à l'autre une ligne ou de faire chuter l'adversaire.



Figure N°1 : Exemple de tir à la corde

Le problème comportant un plan de symétrie, on se ramène à la modélisation de la figure 2. Avec (les distances sont en [m] et les efforts en [kN]) :

$$\begin{array}{l} \text{- } L = 1\text{m} \quad \text{- } \|\vec{F}_1\| = 1 \quad \text{- } \|\vec{F}_2\| = 1,5 \quad \text{- } \|\vec{F}_3\| = 2,5 \end{array}$$

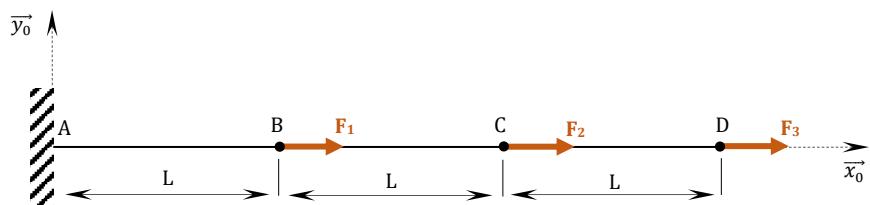


Figure N°2 : Modélisation plane du problème

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez les composantes du torseur de section le long de la poutre ]ABCD[ et ce, sans résoudre le problème de statique.
- Question N°2 :** Tracez l'évolution des composantes du torseur de section le long de la poutre ]ABCD[ et donnez le tronçon le plus sollicité.
- Question N°3 :** Déterminez la contrainte de traction dans la partie la plus sollicitée de la corde. Pour ce faire, cette dernière sera assimilée à un cylindre de diamètre  $D=30\text{mm}$ .
- Question N°4 :** On souhaite un coefficient de sécurité  $s = 4$ . Conclure quant au bon dimensionnement de la corde si la limite d'élasticité du matériau la constituant est de  $R_e = 40\text{MPa}$ .
- Question N°5 :** Déterminez l'allongement relatif (notée  $\varepsilon$  [ $\mu\text{def}$ ]) du tronçon étudié aux questions N°3 et N°4 ( $E = 2\text{GPa}$ ) et sa longueur après déformation (notée  $L_f$  [ $\text{mm}$ ]).

## CORRECTION

Question N°1 : L'étude des différents tronçons donne :

- Tronçon ]AB[ pour  $0 < x_1 < L$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1} = \{\tau_B\}_{G_1} + \{\tau_C\}_{G_1} + \{\tau_D\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1}$$

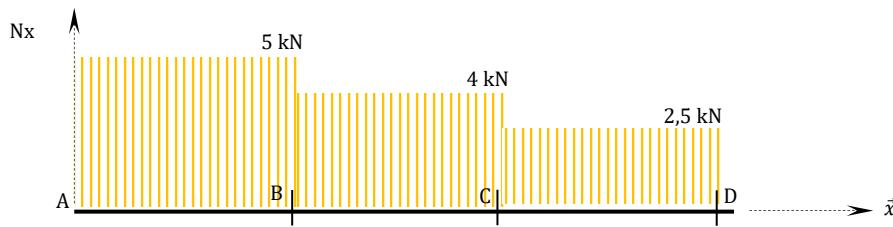
- Tronçon ]BC[ pour  $L < x_2 < 2L$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_2} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_2} = \{\tau_C\}_{G_2} + \{\tau_D\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} F_2 + F_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2} = \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

- Tronçon ]CD[ pour  $2L < x_3 < 3L$  [m] :

$$\{\tau_{int}\}_{G_3} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_3} = \{\tau_D\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} F_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_3} = \begin{Bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_3}$$

Question N°2 : Les variations sont :



Le tronçon AB est le plus sollicité.

Question N°3 : Le tronçon AB étant le plus sollicité, la contrainte de traction maximale est :

$$\sigma_{traction_{AB}} = \frac{N_x}{S} = \frac{N_x}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 N_x}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \times 5 \times 10^3}{\pi \times 30^2} = 7,07 \text{ MPa}$$

Question N°4 : Comme  $\sigma_{traction_{AB}} = 7,07 \text{ MPa} < \frac{R_e}{s} = \frac{40}{4} = 10 \text{ MPa}$ , la corde est donc correctement dimensionnée.

Question N°5 : - Pour déterminer l'allongement relatif  $\varepsilon$ , on utilise la loi de Hooke  $\sigma = E\varepsilon$ . On obtient :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{7,07}{2 \times 10^3} \approx 0,004$$

- Pour déterminer la longueur après déformation  $L_f$ , on exploite les deux relations  $L_f = L + \Delta L$  et  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ . On obtient :  

$$L_f = L + \varepsilon L = (1 + \varepsilon)L = (1 + 0,004)1 = 1,004 \text{ m}$$

## ★ ★ Problème N°11 : Mise aux normes d'un système de levage

On se propose de mettre à la norme une biellette équipant une pince de levage (figure N°1). Pour se faire on colle une jauge de déformation en son centre (figure N°2) et on réalise un essai de levage dans le cas d'utilisation le plus défavorable (pleine charge bras complètement ouvert).

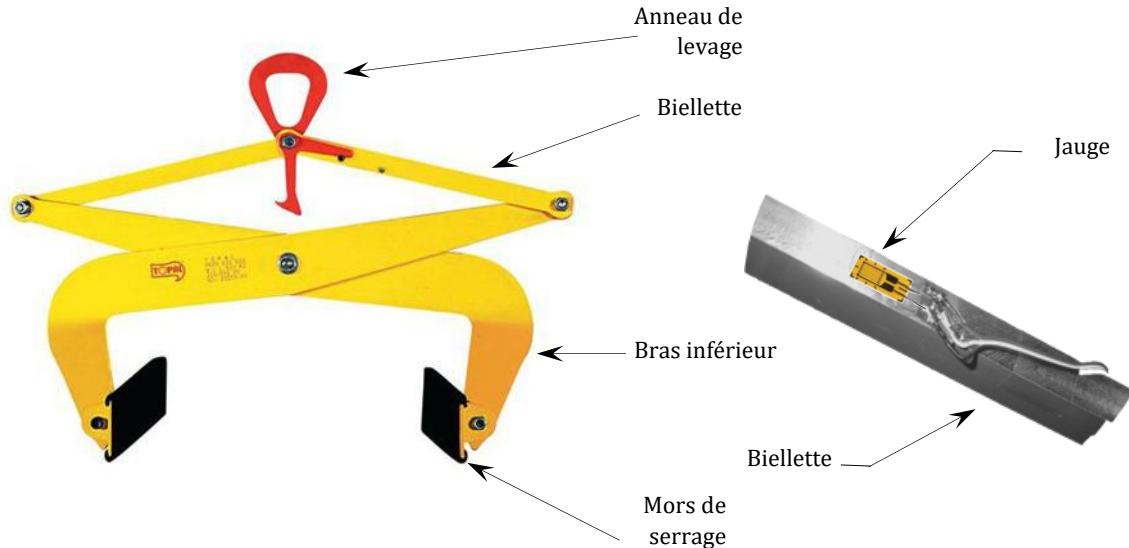


Figure N°1 : Pince de levage

Figure N°2 : Vue de la biellette instrumentée

Lors de la mise en charge du système on relève une déformation de la biellette de  $700 \mu\text{def}$ .

Afin d'exploiter les résultats précédents on réalise en parallèle un essai de traction sur le matériau composant cette biellette. La courbe suivante donne le résultat de ce test :

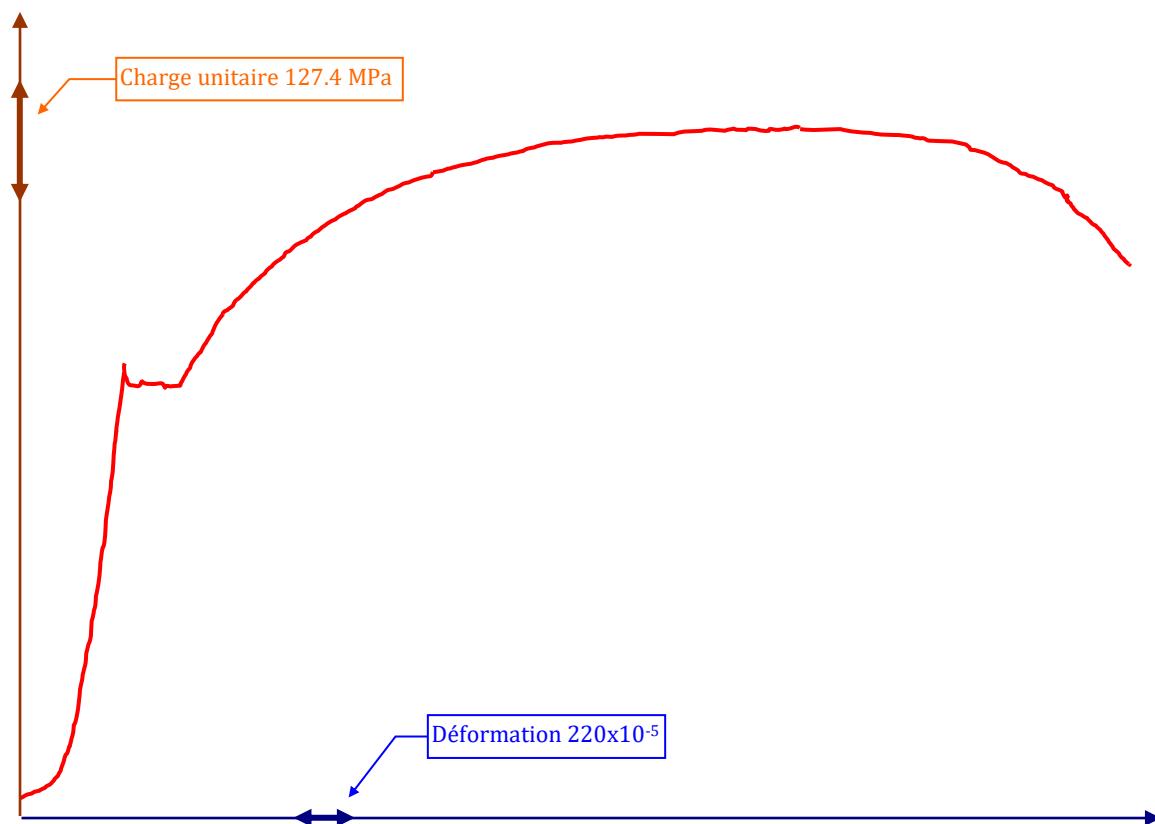


Figure N°3 : Courbe de traction d'un XC48

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

**Question N°1 :** A l'aide de la courbe de traction de la figure N°3, donnez la limite d'élasticité du matériau, la résistance mécanique à la rupture ainsi que son module de Young.

**Question N°2 :** A partir des résultats donnés par la jauge, déterminez la contrainte au sein de la biellette.

**Question N°3 :** Déterminez le coefficient de sécurité de la biellette si l'on considère la limite à rupture ou la limite d'élasticité. A votre avis quel est le cas à retenir ?

Une étude statique permet de déterminer les efforts aux liaisons de la biellette avec ses points d'ancrage. Les résultats sont les suivants :

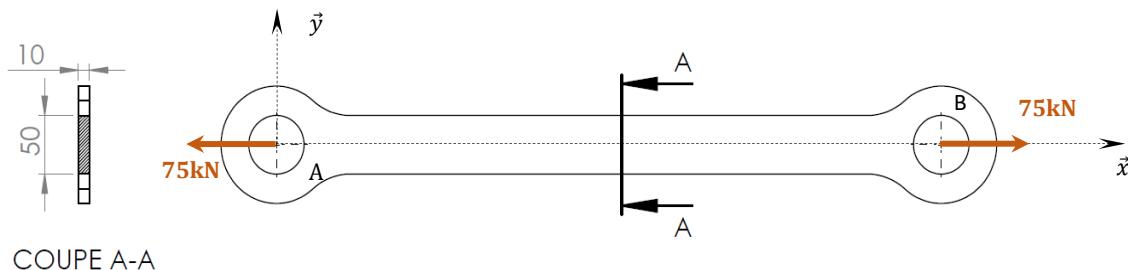


Figure N°4 : Résultats de l'étude statique

**Question N°4 :** Vérifiez la cohérence entre les études analytiques et expérimentales. Expliquez les écarts éventuels.

**Question N°5 :** Sachant que la rénovation de la norme impose un coefficient de sécurité de 4 pour les systèmes de levage, déterminez la nouvelle section de la biellette tout en respectant le rapport  $\left(\frac{L}{l}\right) = 5$  initial.

## CORRECTION

Question N°1 : D'après la courbe de traction on donne :

- $Re = 462 \text{ MPa}$  (limite élastique du matériau)
- $Rm = 733 \text{ MPa}$  (résistance mécanique à la rupture)
- $E = 210 \text{ GPa}$  (module de Young)

On remarque que le module de Young est cohérent avec le matériau utilisé.

Question N°2 : On donne la formule suivante (loi de Hooke) :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_{xx}$$

Or, l'expérience permet de mesurer la valeur de la déformation. Ainsi  $\varepsilon_{xx} = 700 \cdot 10^{-6} \text{ def.}$  De plus la courbe de traction a permis de caractériser le module de Young du matériau ( $E = 210 \text{ GPa}$ ). L'instrumentation de la bielle est donc inutile si l'on ne connaît pas les caractéristiques matériau. Finalement :

$$\sigma = 700 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^3 = 147 \text{ MPa}$$

Question N°3 : Le coefficient de sécurité actuel est de :

- Si l'on considère  $Re : 3$
- Si l'on considère  $Rm : 5$

Question N°4 : On donne la formule suivante :

$$\sigma = \frac{N_x}{S}$$

Il convient de rechercher le terme «  $N_x$  – effort normal ». Pour ce faire utilisons le torseur de section. A partir de l'étude statique on peut écrire :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = -\{\tau_{ext \rightarrow E1}\}_{G_1,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1,R} = -\{\tau_A\}_{G_1,R} = \begin{Bmatrix} 75000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1,R}$$

Ainsi :

$$\sigma = \frac{75000}{50 \cdot 10} = 150 \text{ MPa}$$

On remarque que le résultat est très proche de l'expérience. La différence peut s'expliquer par la direction de collage de la jauge qui n'est peut-être pas coïncident avec l'axe de chargement, les incertitudes de mesure qui s'ajoutent (mesure lors de l'essai de traction, mesure in-situ,...).

Question N°5 : On donne la formule suivante :

$$\sigma = \frac{R_e}{secu} = \frac{N_x}{S}$$

Or :

$$S = L \cdot l = 5l \cdot l = 5l^2$$

Ainsi :

$$l = \sqrt{\frac{N_x \cdot secu}{R_e \cdot 5}} = 11,4 \text{ mm et } L = 57 \text{ mm}$$

## ★★ Problème N°12 : Etude de la résistance d'un câble d'ascenseur

Les premiers ascenseurs sont apparus dès le XVème siècle. Ce mécanisme trouva très vite son utilité dans les mines. Toutefois, les accidents provoqués par la fatigue des câbles étaient très courants et ont très largement limité l'expansion de ces machines. On doit à Elisha OTIS l'invention du premier frein à déclenchement automatique qui permettait de stopper la cabine en cas de rupture des liens.

On se propose dans cet exercice de comparer l'influence de l'accélération sur le dimensionnement d'un câble d'ascenseur. Pour cela, on souhaite lever une charge de 1500kg à une vitesse de  $5\text{m.s}^{-1}$ . La cabine atteint sa vitesse maximale au bout de 1,3 secondes. Le coefficient de sécurité adopté est de  $s=12$ .

Les fournisseurs de câbles donnent les informations suivantes :

CÂBLE Galva MONOTORON de 19 fils (1 + 6 + 12 fils)												CE réf. 1008
Galvanized steel wire-rope 1x19												
Applications : câble semi-rigide de transmission (freins, etc...), idéal pour haubanages												Résistance de l'acier : 180 kg/mm <sup>2</sup>
Nuance de l'acier : GALVANISÉ / Tolérance sur le diamètre : selon norme												
CODE	0GE180	AGE180	BGE180	CGE180	GGE180	JGE180	KGE180	LGE180	MGE180	NGE180	PGE180	
diam câble (mm)	1	1,2	1,5	1,8	3	4	6	8	10	12	15	
poids/mètre (kg)	0,005	0,005	0,011	0,02	0,045	0,079	0,18	0,315	0,49	0,71	1,15	

Monotoron - 19 fils

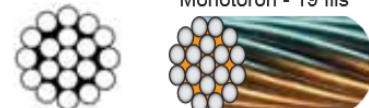


Figure N°1 : Caractéristiques des câbles métalliques

**Question N°1 :** Déterminez la section d'un câble permettant d'assurer la sécurité des usagers lorsque l'ascenseur se déplace à  $5\text{m.s}^{-1}$ .

**Question N°2 :** Déterminez l'accélération de la cabine.

**Question N°3 :** Déterminez la charge sur le câble liée à l'accélération de la cabine. Quel est alors le câble qu'il convient d'installer ?

Remarque 1 : Le système de traction d'un ascenseur comporte plusieurs câbles. Chacun d'entre eux doit pouvoir supporter la charge totale. Ainsi, si un lien vient à rompre, les autres permettent d'assurer la sécurité des usagers. Cette règle est toutefois spécifique au transport des personnes.

Remarque N°2 : Rappels sur les câbles

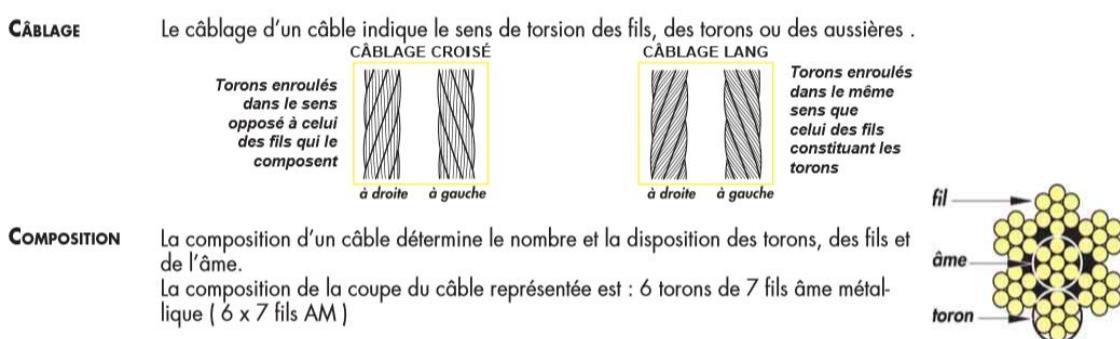


Figure N°2 : Nomenclature d'un câble (source : LEVAC)

## CORRECTION

Question N°1 : A vitesse constante seul le poids agit sur le câble. Ainsi :

- Charge sur le câble : 1500kg
- Limite d'élasticité du câble : 180kg/mm<sup>2</sup> soit 1800 MPa
- Coefficient de sécurité adopté : 12

Le câble est soumis à la traction pure ainsi :

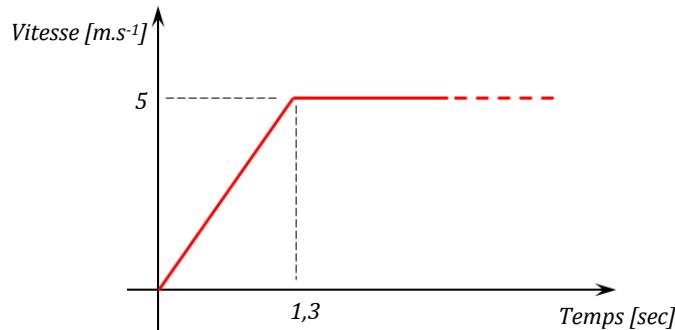
$$\frac{\sigma_e}{s} = \frac{N_x}{S_{câble}} \text{ avec } S_{câble} = \frac{\pi \cdot d_{câble}^2}{4}$$

Par conséquent :

$$d_{câble} = \sqrt{\frac{N_x \cdot s \cdot 4}{\sigma_e \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{1500 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 4}{1800 \cdot \pi}} = 11,2 \text{ mm}$$

Il convient alors de sélectionner un câble dont le diamètre est de 12mm

Question N°2 : La commande de déplacement de la cabine obéit à une loi de type « trapèze ». Ainsi :



L'accélération de la cabine est donc de :

$$a = \frac{v}{t} = \frac{5}{1,3} = 3,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Question N°3 : D'après le principe fondamental de la dynamique, la charge sur le câble devient :

$$N_{x-acc} = 1500 \cdot 10 + 1500 \cdot 3,85 = 20775 \text{ N}$$

Ainsi :

$$d_{câble} = \sqrt{\frac{N_x \cdot s \cdot 4}{\sigma_e \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{20775 \cdot 12 \cdot 4}{1800 \cdot \pi}} = 13,3 \text{ mm}$$

Il convient alors de sélectionner un câble dont le diamètre est de 15mm

Soit une contrainte dans le câble de 117,6MPa. Le coefficient de sécurité est donc de 15,3.

## ★★★ Problème N°13 : Etude d'une pale d'hélicoptère (Annale ENS Cachan)



Figure N°1 : Vue d'un hélicoptère

Elle tourne à une vitesse de rotation  $\omega$ . Les effets d'inertie se traduisent par une charge répartie  $\vec{f}(t) = \rho S \omega^2 (t + a) \vec{x}$  dans la direction de la poutre (figure N°2). Avec  $t$  l'abscisse variant de 0 à  $L$  d'un point quelconque de cette dernière.

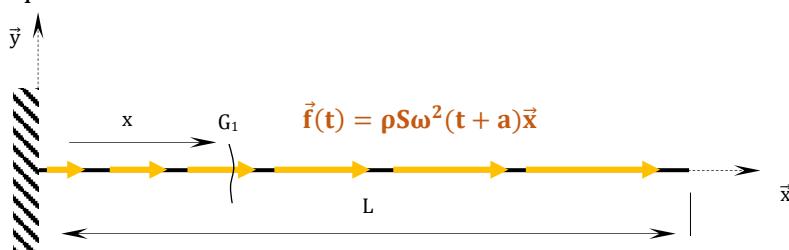


Figure N°2 : Modélisation de la pale d'hélicoptère

**Question N°1 :** Exprimez le torseur de cohésion le long de la pale et calculez l'expression de la contrainte de traction en fonction des données du problème.

**Question N°2 :** Exprimez la contrainte de traction maximale dans la pale.

**Question N°3 :** La pale tourne à la vitesse de 200 radians par seconde. Sa longueur vaut 3 m. La longueur «  $a$  » vaut 0,1m. On considère un coefficient de sécurité  $s=1$ . Choisissez parmi les 3 matériaux suivants celui qui pourrait être utilisé pour réaliser la pale : l'acier ( $\rho_{acier}=7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $R_{acier}=450 \text{ MPa}$ ), le titane ( $\rho_{titane}=4500 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $R_{titane}=1200 \text{ MPa}$ ) et un alliage d'aluminium ( $\rho_{alu}=2700 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $R_{alu}=270 \text{ MPa}$ ).

### CORRECTION

**Question N°1 :** Il convient de réaliser une coupure le long de la poutre afin d'obtenir le torseur de section. Ainsi :

$$\{\tau_{int}\}_{G_1} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \int_{t=x}^{t=L} f(t)dt & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1}$$

Avec :

$$\int_{t=x}^{t=L} f(t)dt = \int_{t=x}^{t=L} \rho S \omega^2 (t + a) dt = \rho S \omega^2 \cdot \left[ \frac{t^2}{2} + at \right]_{t=x}^{t=L}$$

Finalement

$$N_x = \rho S \omega^2 \cdot \left( \frac{L^2 - x^2}{2} + a(L - x) \right)$$

L'expression de la contrainte de traction est donc :

$$\sigma = \frac{N_x}{S} = \rho \omega^2 \cdot \left( \frac{L^2 - x^2}{2} + a(L - x) \right)$$

**Question N°2 :** La contrainte maximale de traction se trouve au niveau de l'encastrement. Ainsi :

$$\sigma_{max} = \rho \omega^2 \cdot \left( \frac{L^2}{2} + aL \right)$$

**Question N°3 :** Pour l'acier :  $\sigma_{pale} = 1497,6$  MPa ne peut convenir pour l'application car la contrainte max dans la pale est supérieure à la limite d'élasticité.

Pour le titane :  $\sigma_{pale} = 864$  MPa peut convenir à l'application car la contrainte max dans la pale est inférieure à la limite d'élasticité.

Pour l'aluminium :  $\sigma_{pale} = 518,4$  MPa ne peut convenir pour l'application car la contrainte max dans la pale est supérieure à la limite d'élasticité.

On sélectionne donc, le titane.

### ★★★ Problème N°14 : Etude d'une vis fusible

On se propose de dimensionner une vis fusible. Cette dernière doit rompre en cas de surcharge afin de protéger les biens et les personnes. Pour ce faire, on considère les données suivantes :

- Diamètre à fond de filet de la vis :  $D = 22\text{mm}$
- Longueur de la vis :  $L = 150\text{mm}$
- Résistance d'élasticité du matériau composant la vis :  $Re = 640\text{MPa}$
- Résistance à rupture du matériau constituant la vis :  $Rm = 800\text{MPa}$
- Charge d'épreuve max :  $F = 14\,000\text{daN}$

On considère la modélisation N°1 de la vis (figure N°1) :

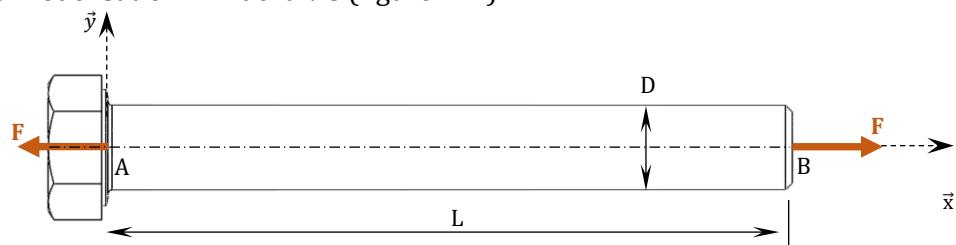


Figure N°1 : Vis sans gorge de rupture

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question 1 :** Déterminez les composantes du torseur de section le long de la vis ]AB[.
- Question 2 :** A quel type de contrainte est soumise la vis ? Calculez la valeur de cette contrainte et tracez sa répartition sur une section de la vis.
- Question 3 :** La vis casse-t-elle sous l'action de la charge d'épreuve ?
- Question 4 :** Déterminez l'allongement de la vis. Quelle sera sa longueur finale après déformation ?

Pour répondre à la problématique posée, on se propose de réaliser une gorge ( $R = 2\text{mm}$  et  $d = 18\text{mm}$ ) sur la partie cylindrique de la vis (figure N°2) :

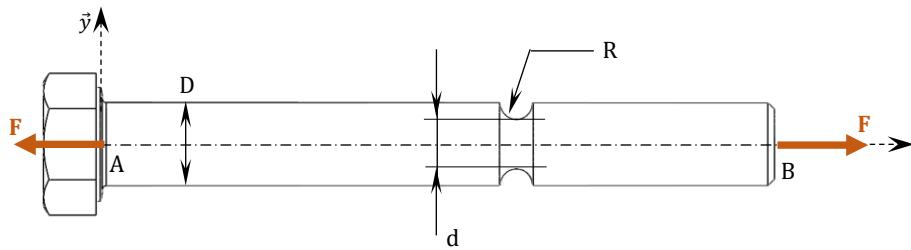


Figure N°2 : vis avec gorge de rupture

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question 5 :** Déterminez, à l'aide de l'abaque (figure N°3) le coefficient de concentration de contrainte (noté  $K_t$ ) relatif à la singularité géométrique présente sur la vis.
- Question 6 :** Déterminez alors la contrainte maximale et vérifier le bon fonctionnement de la vis fusible.
- Question 7 :** Pourquoi est-il important de réaliser la gorge au loin des points d'application des efforts (tête de la vis et écrou en B) ?

### CORRECTION

Question N°1 : Il convient de réaliser une coupure le long de la poutre afin d'obtenir le torseur de section. Ainsi :

$$\{\tau_{int}\}_{G,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G,R} = \{\tau_B\}_{G,R}$$

On déplace le torseur  $\{\tau_B\}$  et on l'exprime au point G :

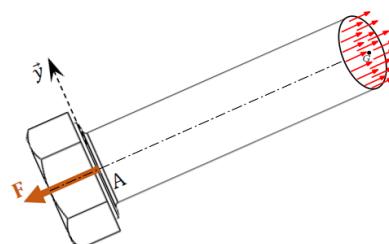
$$\{\tau_B\}_B = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B,R} \rightarrow \{\tau_B\}_G = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G,R}$$

On obtient donc le torseur de cohésion sur la poutre ]AB[ :  $0 < x < L$

$$\{\tau_{int}\}_{G,R} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{G,R} \quad [\text{N}, \text{Nm}]$$

Question N°2 : La vis est soumise uniquement à une contrainte normale (effort normal) :

$$\sigma_{\text{normale}} = \sigma_{\text{traction}} = \frac{N}{S} = \frac{N}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \times 14000 \times 10}{\pi \times 22^2} = 368,3 \text{ MPa}$$



Question N°3 : - La contrainte maximale dans la vis est :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{normale}} = 363,8 \text{ MPa}$$

- La résistance à rupture est :  $R_m = 800 \text{ MPa}$

Puisque  $\sigma_{\max} < R_m$ , donc on en déduit que la vis ne casse pas.

Question N°4 : - Pour l'allongement de la vis  $\Delta L = L_f - L$  :

On exploite les deux relations  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$  et  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  :

$$\Delta L = \varepsilon \times L = \frac{\sigma}{E} \times L = \frac{368,3}{210 \times 10^3} \times 150 = 0,263 \text{ mm}$$

- La longueur finale après déformation  $L_f$  :

$$L_f = L + \Delta L = 150 + 0,263 = 150,263 \text{ mm}$$

Question N°5:

- $\frac{d}{D} = \frac{18}{22} = 0,82$

- $\frac{r}{t} = \frac{2}{2} = 1$  (avec  $2t + d = D \Rightarrow t = \frac{D-d}{2} = \frac{22-18}{2} = 2$ )

Donc :  $K_t = 2,18$

Question N°6 : - La contrainte nominale est :

$$\sigma_{\text{nominale}} = \frac{N}{S} = \frac{N}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \times 14000 \times 10}{\pi \times 18^2} = 550,2 \text{ MPa}$$

- La contrainte maximale est :

$$\sigma_{\max} = K_t \times \sigma_{\text{nominale}} = 2,18 \times 550,2 = 1199,4 \text{ MPa}$$

Question N°7 : On réalise la gorge à distance des zones d'application des efforts (tête de la vis et écrou en B) afin de ne pas affaiblir/sur solliciter les zones les plus sollicitées et ainsi éviter les concentrations de contraintes (principe de Saint-Venant), les risques de rupture, et améliorer la tenue mécanique.



### Problème N°15 : Allègement d'une bielle de pompe à pistons

Le système présenté par la figure N°1 est une pompe à deux étages de compression. Cette dernière est actionnée à l'aide d'un levier (pièce N°16) manœuvré par un opérateur. Elle permet, par exemple, d'alimenter en énergie les vérins montés sur des presses de mécanicien.

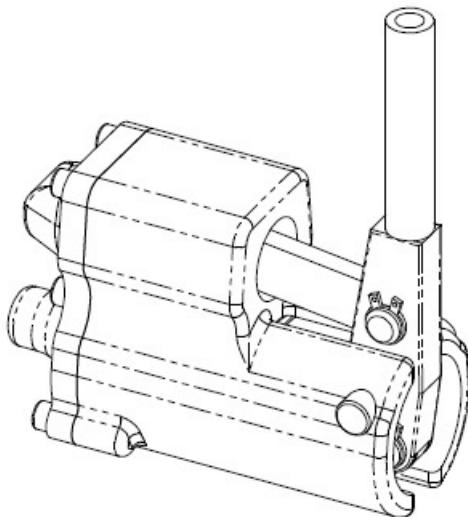


Figure N°1 : Vue de la pompe

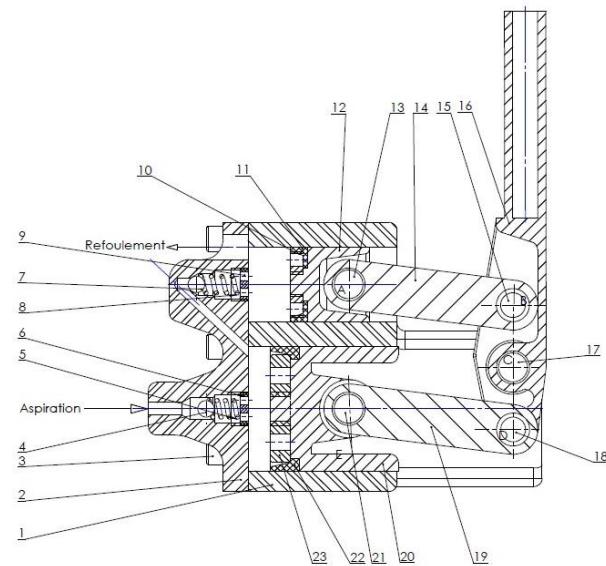


Figure N°2 : Vue en coupe de la pompe

La bielle référencée 14 sur la figure N°2 est produite par moulage d'un alliage d'aluminium. L'entreprise en charge de la fabrication de ce composant souhaite augmenter son profit en réduisant la masse de la pièce et ce, sans changer le matériau. Le cahier des charges retenu est le suivant :

Matériau :	AU4G	Limite à rupture [MPa] :	355
Coefficient de sécurité :	1,1	Limite d'élasticité en traction [MPa] :	280
CdCf-01 : Allègement de la biellette 14 par modification de la géométrie			

Après avoir conduit une analyse statique (liaisons sans jeu et sans frottement), le bureau d'étude donne le torseur de section suivant (efforts en [N]) :

$$\{\tau_{int}\}_G = \begin{Bmatrix} -8\,000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$$

Deux solutions sont alors dessinées :

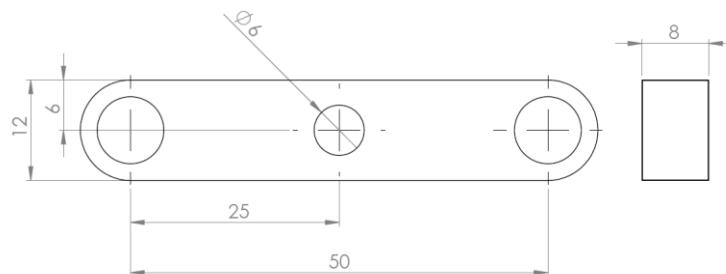


Figure N°3 : Vue de la solution N°1

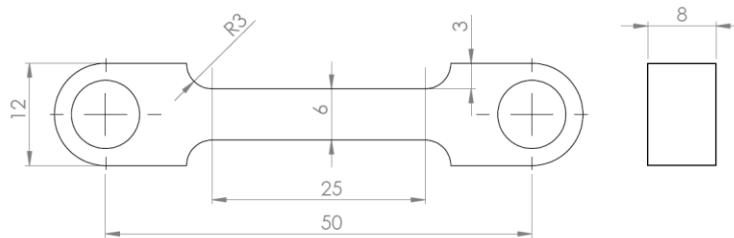


Figure N°4 : Vue de la solution N°2

Répondez aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Vérifiez la validité de chacune des deux solutions. Concluez.

**Question N°2 :** Proposez un nouveau diamètre de trou pour la solution N°1.

**Question N°3 :** Le volume de la bielle initial était de 4900,53mm<sup>3</sup>. Le volume de la bielle issu de la solution N°2 est de 3474,34mm<sup>3</sup>. Calculez le volume final de la bielle de la question N°2. Pour chacune des solutions, donnez le gain de matière obtenu. Concluez sur la solution à adopter vis-à-vis du gain, de la résistance et de la fabricabilité.

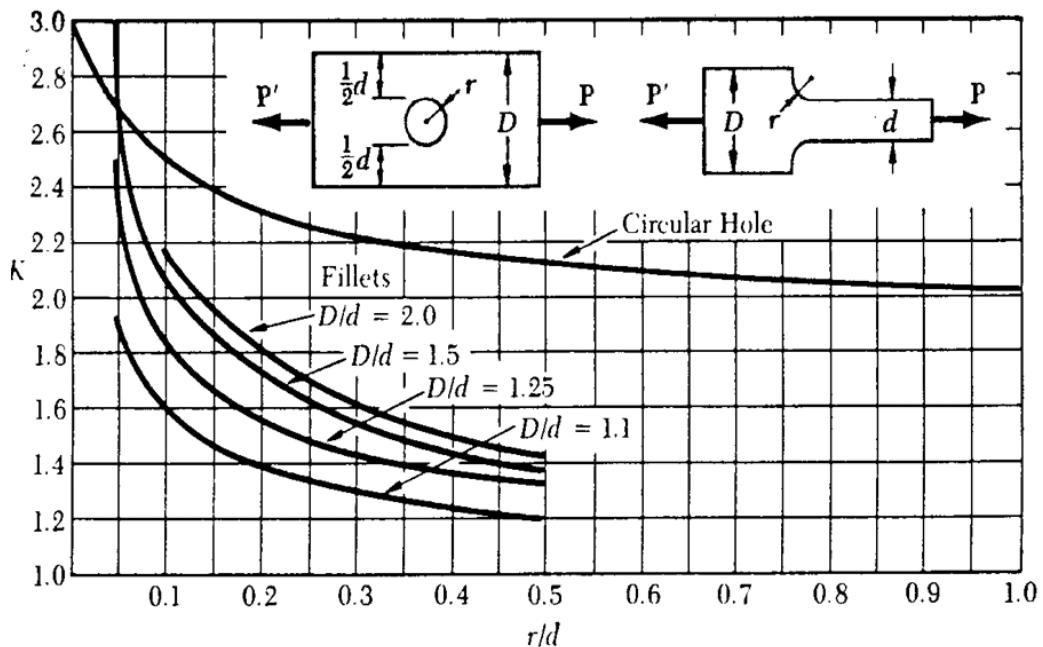


Figure N°5 : Abaque pour la détermination des coefficients de contrainte en traction

### CORRECTION

**Question N°1 :** Pour la solution N°1 :

-Contrainte au loin de singularité géométrique :

$$\sigma_1 = \frac{N_x}{S_1} = \frac{8\ 000}{8 \cdot 12} = 83,3 \text{ MPa}$$

Au niveau de la singularité géométrique (du trou), il y a une concentration de contrainte, il convient donc de calculer dans un premier temps la contrainte nominale puis de la multiplier par le coefficient de contrainte  $k_t$ .

-Contrainte nominale dans la singularité géométrique :

$$\sigma_2 = \frac{N_x}{S_2} = \frac{8\,000}{(8 \cdot 12) - (6 \cdot 8)} = 166,6 \text{ MPa}$$

-Coefficient de concentration de contrainte lié à la singularité :

$$r/d = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ par conséquent } k_t_1 = 2,16$$

-Contrainte max :

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 \cdot k_t_1 = 166,6 \cdot 2,16 = 360 \text{ MPa}$$

Pour la solution N°2 :

-Contrainte au loin de singularité géométrique :

$$\sigma_1 = \frac{N_x}{S_1} = \frac{8\,000}{8 \cdot 6} = 166,7 \text{ MPa}$$

-Contrainte nominale dans la singularité géométrique :

$$\sigma_2 = \sigma_1 = 166,7 \text{ MPa}$$

-Coefficient de concentration de contrainte lié à la singularité :

$$\begin{cases} r/d = \frac{3}{6} = 0,5 \\ D/d = \frac{12}{6} = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Par conséquent } k_t_2 = 1,43$$

-Contrainte max :

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 \cdot k_t_2 = 166,7 \cdot 1,43 = 238,4 \text{ MPa}$$

En conclusion, on remarque que la solution N°1 n'est pas valide car la contrainte max dans la bielle dépasse la limite à rupture du matériau employé. La solution N°2, quant à elle convient tout à fait au cahier des charges. En effet, la contrainte max calculée dans la bielle reste inférieure à la limite d'élasticité du matériau et ce, même en appliquant le coefficient de sécurité de 1,1 (attention à la fatigue du matériaux).

Question N°2 :

ATTENTION LA SOLUTION N'EST PAS UNIQUE

Pour répondre à la contrainte principale du CDCF, il convient de rester en dessous de la limite d'élasticité du matériau entachée du coefficient de sécurité. Ainsi :

$$\sigma_{\max} = \frac{R_e}{s} = \frac{280}{1,1} = 255 \text{ MPa}$$

Pour les trous circulaires le coefficient de concentration de contrainte varie entre 2,4 et 2,7 (on sélectionne un intervalle dans lequel travailler). Ainsi la contrainte nominale au niveau de la singularité géométrique doit être comprise entre 94,4 et 106,25 MPa.

Pour commencer, nous allons prendre la valeur de la plus grande contrainte (106,25 MPa) correspondant à un  $K_t=2,4$  car c'est cette dernière qui va donner l'enlèvement de matière le plus important. Ainsi :

$$r/d = 0,15$$

Il y a une équation pour deux inconnues. Il convient donc de trouver une autre équation. En utilisant la fermeture géométrique, il vient :

$$\begin{cases} r/d = 0,15 \\ D = 2 \cdot r + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r/d = 0,15 \\ 12 = 2 \cdot r + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = 1,38 \\ d = 9,23 \end{cases}$$

Il vient :

$$r = 1,38\text{mm} \text{ donc le diamètre du trou est de } 2,77\text{mm}$$

Il convient alors de vérifier la contrainte nominale liée à cette singularité géométrique :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{N_x}{S_2} = \frac{8\,000}{(8 \cdot 12) - (2,77 \cdot 8)} = 108,3\text{MPa}$$

On remarque que :

$$\sigma_{\text{nom}} \cdot kt > \sigma_{\text{max}}$$

Cette solution n'est donc pas valide.

Essayons avec  $kt=2,7$  :

$$\begin{cases} r/d = 0,05 \\ D = 2 \cdot r + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r/d = 0,15 \\ 12 = 2 \cdot r + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = 0,55 \\ d = 10,9 \end{cases}$$

Il vient :

$$r = 0,55\text{mm} \text{ donc le diamètre du trou est de } 1,1\text{mm}$$

Il convient alors de vérifier la contrainte nominale liée à cette singularité géométrique :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{N_x}{S_2} = \frac{8\,000}{(8 \cdot 12) - (1,1 \cdot 8)} = 91,7\text{MPa}$$

Finalement :

$$\sigma_{\text{nom}} \cdot kt < \sigma_{\text{max}}$$

La solution est donc valide. On pourrait continuer l'étude en affinant l'intervalle de travail afin de converger vers une valeur unique. Le diamètre du trou doit donc être de 1,1mm

Question N°3 : Le volume de la bielle issue de la modification de la solution N°1 (solution N°1-V2) est de :

$$V_f = 4900,53 - \frac{\pi \cdot 1,1^2 \cdot 8}{4} = 4892,93\text{mm}^3$$

Ainsi le gain en masse associé à chacune des solutions est :

- Pour la solution N°2 :

$$G_{\text{sol-2}} = \frac{|3474,34 - 4900,53|}{4900,53} \cdot 100 = 29\%$$

- Pour la solution N°1-V2 :

$$G_{\text{sol-1-v2}} = \frac{|4892,93 - 4900,53|}{4900,53} \cdot 100 = 0,2\%$$

On remarque que la solution N°2 est très rentable car elle fait économiser 29% de matière. La modification à opérer sur le modèle de fonderie pour obtenir cette forme de bielle est minime et tout à fait possible. En revanche la solution N°1-V2 est quant à elle inutile car le gain en masse est ridicule et la complexité de mise en œuvre est trop grande (impossible de mettre un noyau de cette taille pour obtenir le trou au centre de la pièce, et le faire par perçage ajouterait une phase => trop cher).

## ★★★★★ Problème N°16 : Etude d'un câble de treuil

Le Burj Khalifa s'élève à 828 m (figure N°1). Il constitue le cadre d'une étude visant à dimensionner un câble de treuil destiné à sécuriser les laveurs de vitres opérant sur les façades extérieures de la tour.

Le filin est considéré comme librement suspendu dans le vide, soumis uniquement à son propre poids, et modélisé sous la forme d'une barre d'acier à section circulaire. On donne les caractéristiques suivantes :

- $R_e = 235 \text{ MPa}$
- $E = 210 \text{ GPa}$
- $\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$
- Coefficient de sécurité,  $s = 2$



Figure N°1 : Vue du Burj Khalifa

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Déterminez le point le plus sollicité du câble.

**Question N°2 :** Calculez la longueur maximale du câble ? Est-il adapté à la sécurisation des opérateurs de la tour ?

**Question N°3 :** Calculer l'allongement de ce câble si sa longueur initiale correspond à la hauteur de la tour (on prendra  $E = 210 \text{ GPa}$ ).

### CORRECTION

**Question N°1 :** Déterminez le point le plus sollicité du câble.

La répartition du poids le long du câble est du type «  $y = ax + b$  ».

Ainsi, l'effort normal en tout point de la poutre est donné par la relation :

$$N_x = -\frac{\pi \rho_{\text{acier}} g d^2}{4} \cdot x + \frac{\pi \rho_{\text{acier}} g d^2 L}{4} = \frac{\pi \rho_{\text{acier}} g d^2}{4} (L - x)$$

Le point le plus sollicité est donné pour  $x = 0$  (au niveau du treuil).

**Question N°2 :** Calculez la longueur maximale du câble ? Est-il adapté à la sécurisation des opérateurs de la tour ?

On donne :

$$\frac{R_e}{s} \geq \frac{N_x}{S}$$

Ainsi, en utilisant l'expression déterminée à la question N°1 :

$$\frac{R_e}{s} \geq \rho_{\text{acier}} g L$$

Finalement :

$$L \leq \frac{R_e}{s \cdot \rho_{acier} \cdot g}$$

L'application numérique donne :

$$L \leq 1496,8 \text{ mètres}$$

La longueur trouvée est supérieure à la hauteur de la tour. Il peut donc convenir si on continue à ne pas considérer le poids de l'opérateur suspendu au bout, heureusement à cette hauteur ses pieds toucheront déjà le sol...

**Question N°3 :** Calculer l'allongement de ce câble si sa longueur initiale correspond à la hauteur de la tour (on prendra  $E = 210 \text{ GPa}$ ).

On donne :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma_{n(x)}}{E}$$

Ainsi :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma_{n(x)}}{E} \cdot dx$$

La contrainte normale en tout point de la poutre est donnée par la relation :

$$\sigma_{n(x)} \geq \frac{N_x}{S} = \rho_{acier} g \cdot (L - x)$$

On remarque que la contrainte n'est pas constante le long de la barre.

Finalement :

$$\Delta L = \frac{\rho_{acier} g}{E} \cdot \int_0^L (L - x) \cdot dx = \frac{\rho_{acier} \cdot g \cdot L^2}{2 \cdot E}$$

L'application numérique donne :

$$\Delta L = 0,128 \text{ mètres soit } 12,8 \text{ cm}$$

## Hyperstatisme et treillis

## ★ Problème N°17 : Introduction à l'étude des treillis (méthode de RITTER)

Répondez aux questions suivantes relatives à la structure de la figure N°1 :

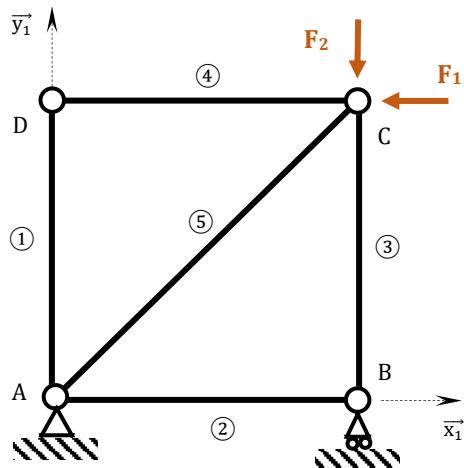


Figure N°1 : Paramétrage du treillis de l'étude

**Question N°1 :** Rappelez la définition et les caractéristiques d'une barre.

**Question N°2 :** Déterminez les actions de liaison au niveau du point A et B.

**Question N°3 :** Déterminez les efforts normaux dans chacune des barres du système.

Données :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\| = 1\text{m}$
- $\|\overrightarrow{F_1}\| = \|\overrightarrow{F_2}\| = 5\text{kN}$

### CORRECTION

**Question N°1 :** Une barre est un solide soumis à deux actions mécaniques (deux glisseurs). Ainsi, ces actions sont de même direction, de sens opposé et de même norme.

**Question N°2 :** Il convient de réaliser le BAME :

$$\{\tau_A\}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{A,R_1} ; \{\tau_B\}_{B,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_B & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B,R_1} ; \{\tau_C\}_{C,R_1} = \begin{Bmatrix} -F_1 & - \\ -F_2 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

On déplace l'ensemble des torseurs au point A, car c'est en ce point qu'il y a le plus grand nombre d'inconnues :

$$\{\tau_B\}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 1 \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{A,R_1} ; \{\tau_C\}_{A,R_1} = \begin{Bmatrix} -F_1 & 0 \\ -F_2 & 0 \\ 0 & -1 \cdot F_2 + 1 \cdot F_1 \end{Bmatrix}_{A,R_1}$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_A - F_1 = 0 \\ Y_A + Y_B - F_2 = 0 \\ 1 \cdot Y_B - 1 \cdot F_2 + 1 \cdot F_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = F_1 = 5\text{kN} \\ Y_B = F_2 - F_1 = 0\text{kN} \\ Y_A = F_1 = 5\text{kN} \end{cases}$$

**Question N°3 :** Les sollicitations dans les barres sont :

Barre ① : 0kN (obtenue après une coupure en D)

Barre ② : 0kN (obtenue après une coupure en B)

Barre ③ : 0kN (obtenue après une coupure en B)

Barre ④ : 0kN (obtenue après une coupure en D)

Barre ⑤ : -7,07kN (obtenue après une coupure en A ou en C) => compression

## ★★★ Problème N°18 : Etude d'un treillis de type Warren

Le treillis de type « Warren simple » est l'une des structures métalliques la plus utilisée pour la réalisation de ponts (ferroviaire, autoroutier, passerelle, ...). Elle se compose d'une série de triangles équilatéraux disposés l'un sur l'autre. Cet exercice propose de dimensionner les barres de la structure en appliquant la méthode de RITTER.



Figure N°1 : Vue d'un treillis de type Warren simple  
(source : Structurae)

La longueur d'un côté des triangles constituant le treillis est de 5 mètres. La structure est sollicitée par un effort ponctuel en C de 20kN.

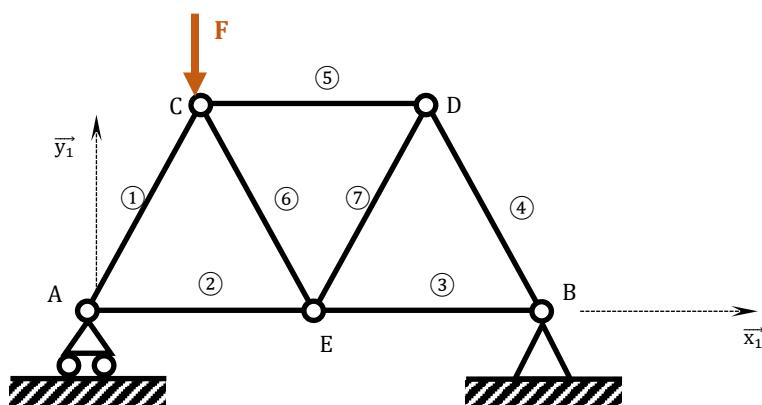


Figure N°2 : Paramétrage du système

**Question N°1 :** Déterminez les actions aux liaisons puis les efforts intérieurs dans les différentes barres du treillis. Consignez vos résultats dans un tableau.

**Question N°2 :** Le matériau utilisé pour la réalisation de ce treillis est un acier S235. Le coefficient de sécurité adopté pour le dimensionnement est de 3, déterminez la dimension de la barre la plus sollicitée en traction (barre de section carrée). Déterminez également sa longueur après allongement ( $E=210\text{GPa}$ ).

### CORRECTION

Question N°1 : Dans un premier temps, il convient de réaliser le BAME :

$$\{\tau_B\}_{B,R_1} = \begin{pmatrix} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{B,R_1} ; \{\tau_A\}_{A,R_1} = \begin{pmatrix} 0 & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{A,R_1} ; \{\tau_C\}_{C,R_1} = \begin{pmatrix} 0 & - \\ -F & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{C,R_1}$$

On déplace l'ensemble des torseurs au point B, car c'est en ce point qu'il y a le plus grand nombre d'inconnues :

$$\{\tau_A\}_{B,R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & -10 \cdot Y_A \end{pmatrix}_{B,R_1} ; \{\tau_C\}_{B,R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 7,5 \cdot F \end{pmatrix}_{B,R_1}$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B - F = 0 \\ -10 \cdot Y_A + 7,5 \cdot F = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_B = 0kN \\ Y_B = \frac{2,5}{10} \cdot F = 5kN \\ Y_A = \frac{7,5}{10} \cdot F = 15kN \end{cases}$$

Les sollicitations dans les barres sont :

Barre ① :	$-\frac{15}{\sin 60} \approx -17,3kN$ - Effort de compression. Coupe autour de A
Barre ② :	$\frac{15}{\tan 60} \approx 8,7kN$ - Effort de traction. Coupe autour de A
Barre ③ :	$\frac{5}{\tan 60} \approx 2,9kN$ - Effort de traction. Coupe autour de B
Barre ④ :	$-\frac{5}{\cos 60 \cdot \tan 60} \approx -5,8kN$ - Effort de compression. Coupe autour de D
Barre ⑤ :	$-\frac{10}{\tan 60} \approx -5,8kN$ - Effort de compression. Coupe autour de C
Barre ⑥ :	$-\frac{5}{\sin 60} \approx -5,8kN$ - Effort de compression. Coupe autour de C
Barre ⑦ :	$\frac{5}{\cos 60 \cdot \tan 60} \approx 5,8kN$ - Effort de traction. Coupe autour de D

Question N°2 : La barre la plus sollicitée en traction est la barre N°2 avec un effort intérieur de 8,7kN.

Ainsi :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{N_2}{Section}$$

Avec :

$$Section = a^2$$

Finalement :

$$a = \sqrt{\frac{N_2 \cdot s}{R_e}} = 10,5mm$$

Attention cet effort n'est pas le plus dimensionnant, hashtag flambement !!!!

L'allongement vaut :

$$\frac{R_e}{s} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = E \cdot \frac{(L - L_0)}{L_0}$$

Ainsi :

$$L = \left[ \frac{R_e \cdot L_0}{s \cdot E} \right] + L_0 = 5,0019m$$

## ★★★ Problème N°19 : Etude d'une articulation de godet

Une pelle mécanique est une machine qui permet d'effectuer divers travaux tels que le creusement de tranchées ou le terrassement. Les figures suivantes présentent le système dans son ensemble ainsi que la vue détaillée du mécanisme permettant le mouvement du godet.

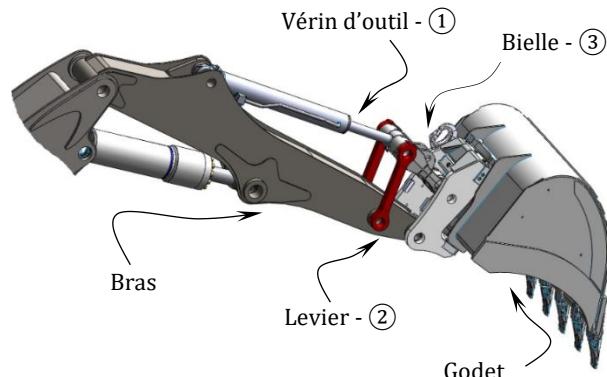


Figure N°1 : Vue d'une articulation de godet d'une pelle mécanique

On se propose de dimensionner les différentes pièces de cette articulation. Pour ce faire, nous considérerons la modélisation ci-dessous où le vérin travaille en sortie de tige ( $F_{\text{vérin}} = 100\text{kN}$ ). Les liaisons en A, B, C et D sont parfaites et sans jeu.

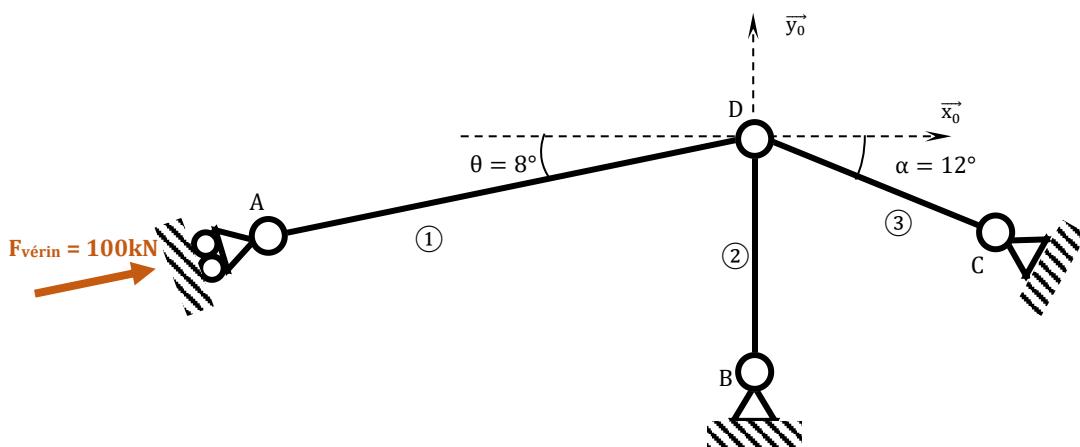


Figure N°2 : Modélisation de l'articulation

Répondez aux questions suivantes :

**Question N°1 :** A l'aide de la méthode de RITTER, déterminez les efforts intérieurs dans le levier, la tige du vérin ainsi que dans la bielle.

**Question N°2 :** Dimensionnez le levier ② sachant que :

- Le matériau employé pour sa réalisation est un acier S355.
- Le coefficient de sécurité adopté est de 1,5.
- La section du levier est rectangulaire avec un rapport  $L/l = 2$ .

Commentez les résultats obtenus.

**Question N°3 :** Dimensionnez l'axe d'articulation en B sachant que :

- Le montage se fait en porte à faux.
- Le coefficient de sécurité adopté est de 1,5.
- L'acier utilisé a une limite de cisaillement ( $R_{pg}$ ) de 150MPa.

Commentez les résultats obtenus.

### CORRECTION

Question N°1 : La première coupure au point A donne l'effort dans la barre N°1 :

$$F_1 = -100\text{kN} \text{ (compression)}$$

La deuxième coupure au point D donne les efforts dans les barres restantes :

$$F_3 = -101,24\text{kN} \text{ (compression) et } F_2 = 34,97\text{kN} \text{ (traction)}$$

Question N°2 : Le levier (Attention on dimensionne UN levier et il y en a DEUX sur la photo...) est soumis à un effort de traction de 17,5kN. Ainsi :

$$\sigma_{levier} = \frac{R_e}{s} = \frac{N_x}{Section}$$

Il vient :

$$l = \sqrt{\frac{F_2 \cdot s}{R_e \cdot 2}} = 6,1\text{mm donc } L = 12,2\text{mm}$$

Dimensions faibles par rapport à la réalité car il faudrait envisager tous les cas et notamment lorsque la tige du vérin rentre (le levier serait soumis à de la compression => flambement, la suite au prochain semestre).

Question N°3 : On donne :

$$\tau_{adm} = \frac{R_{pg}}{s} = \frac{4 \cdot T}{\pi \cdot D^2}$$

Finalement :

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot T \cdot s}{R_{pg} \cdot \pi}} = 15\text{mm}$$

Le cisaillement n'est pas ici dimensionnant (diamètre très petite de l'axe). Il conviendrait de calculer la pression de matage (ici de 194MPa ( $17,5 \times 10^3 / (15 \times 6)$ ) - max de 60 MPa) afin d'assurer le bon fonctionnement et la bonne maintenabilité du système.

## ★★★ Problème N°20 : Etude d'une passerelle suspendue

On modélise une passerelle suspendue à un plafond comme indiqué par la figure suivante :

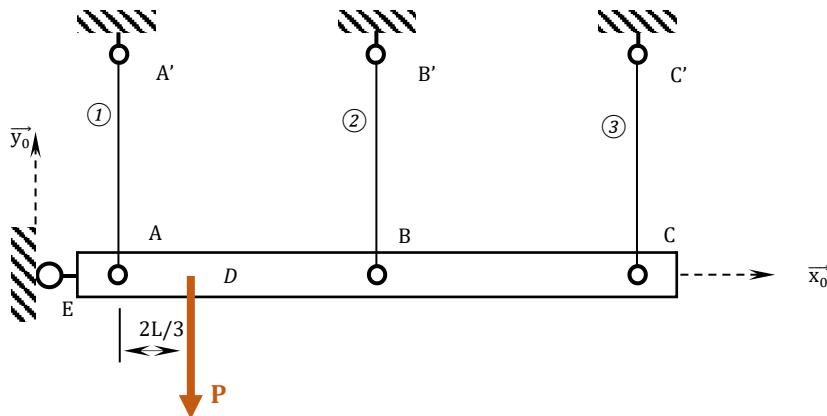


Figure N°1 : Vu de la modélisation de la passerelle suspendue

On considère ici que la passerelle ainsi que le plafond sont indéformables. Les câbles qui la supportent sont identiques et assimilables à une barre de diamètre  $\varnothing_{\text{barre}}$  réalisée en acier (E, v) et espacés d'une longueur L. Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites.

**Question N°1 :** Déterminez le degré d'hyperstatisme de la structure. Combien d'équation(s) supplémentaire(s) est-il nécessaire d'avoir pour pouvoir résoudre ce problème ?

**Question N°2 :** Déterminez une équation de déformation permettant de lever l'hyperstatique et de donner les efforts dans l'ensemble des câbles en fonction des données du problème.

### CORRECTION

Question N°1 : Il y a quatre inconnues :

- 3 efforts de traction dans les barres.
- 1 inconnue de réaction au point E (liaison ponctuelle).

Le PFS ne fournit que 3 équations dans le plan.

Le problème est donc hyperstatique de degrés 1.

On a besoin d'une équation supplémentaire pour pouvoir résoudre le problème.

Question N°2 : L'application du PFS sur la barre N°4 donne :

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 - P = 0 \\ -\frac{2PL}{3} + F_2L + 2F_3L = 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser les équations de déformation des fils :

- En notant « l » la longueur initiale de chaque fil
- La loi de Hooke donne :

$$\Delta l = \frac{N_x l}{EA}$$

- Avec  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  et  $\Delta C$  les allongements respectifs des 3 fils.
- Le théorème de Thalès donne :

$$\frac{\Delta B - \Delta A}{L} = \frac{\Delta C - \Delta A}{2L}$$

Finalement on obtient l'équation manquante :

$$2\Delta B - \Delta A - \Delta C = 0 \rightarrow 2F_2 - F_1 - F_3 = 0$$

Ainsi :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{P}{2} \\ F_2 = \frac{P}{3} \\ F_3 = \frac{P}{6} \end{cases}$$

## **Sollicitation élémentaire : Cisaillement**

## ★ Problème N°21 : Effort sur un tapis de course

Un tapis de course est constitué d'un châssis métallique soutenant la bande roulante et le poids de l'utilisateur.

La bande et le moteur s'appuient sur deux poutres rectangulaires situées sous la plateforme.

Lorsqu'un utilisateur (Sarah) se place au centre du tapis, le poids se répartit équitablement sur les deux poutres.

On souhaite étudier le cisaillement dans une poutre au niveau de ses appuis, en négligeant la flexion.



Figure N°1 : Sarah sur son tapis de course

Les données du problème sont les suivantes :

- Longueur de la poutre :  $L=1.5$  m
- Section rectangulaire :  $b= 60$  mm,  $h = 100$  mm
- Poids de Sarah :  $P= 785$  N
- Position de Sarah sur la poutre :  $a=1.1$  m
- Module de Coulomb :  $G=80$  GPa

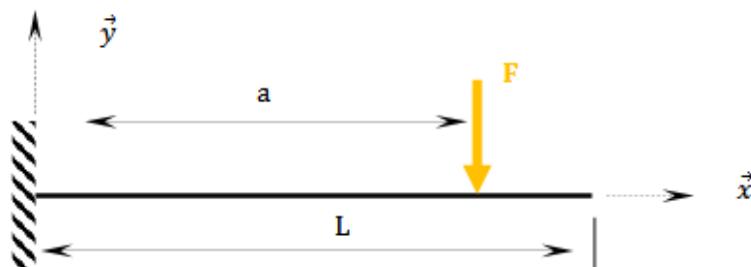


Figure N°2 : Modélisation du problème

Remarque La charge  $F$  supportée par une seule poutre est la moitié du poids total de Sarah.

**Question N°1 :** Déterminez le torseur de cohésion.

**Question N°2 :** Calculez la contrainte tangentielle moyenne.

**Question N°3 :** Estimez l'angle de distorsion (ou de glissement) dû au cisaillement dans la poutre. Commentez le résultat.

### CORRECTION

**Question N°1 :** Etude du tronçon] AB[: 0<x<a

$$\{\tau_{int}\}_{G_1,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_1,R} = \{\tau_B\}_{G_1,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(a-x) \end{Bmatrix}_{G_1,R}$$

Etude du tronçon] BC[: a<x<L

$$\{\tau_{int}\}_{G_2,R} = \{\tau_{ext \rightarrow E2}\}_{G_2,R} = \{\tau_C\}_{G_2,R} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2,R}$$

Dans la suite, on néglige le moment fléchissant suivant z pour se focaliser sur le cisaillement.

N.B : la flexion sera abordée au S3

Question N°2 : L'effort tranchant est maximal sur le tronçon] AB[ avec Ty=-F sur l'ensemble du tronçon

La contrainte tangentielle moyenne est donnée par :

$$\tau_{moy} = \frac{T_y}{S} = \frac{392,5}{0,006} = 65,4 \text{ kPa}$$

Question N°3 : La déformation angulaire moyenne (ou glissement) est :

$$\gamma = \frac{\tau_{moy}}{G} = \frac{65,4 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9} = 8,2 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

Remarque :

L'angle de distorsion traduit la déformation en cisaillement du matériau. Il correspond à l'angle entre deux fibres initialement perpendiculaires dans la poutre, qui se déforment sous l'effet des efforts tranchants.

Plus  $\gamma$  est grand, plus la poutre "glisse" localement (déformation importante).

Ici,  $\gamma=8,2 \cdot 10^{-7}$  rad est extrêmement faible, ce qui signifie que la poutre est très rigide en cisaillement : la déformation angulaire est négligeable à l'œil nu. Ce qui est rassurant pour un tapis de course 😊

## ★★★ Problème N°22 : Etude d'un joint collé

L'utilisation de matériaux composites est de plus en plus répandue. Leur usage impose le développement de colles performantes permettant d'assembler de façon définitive et durable deux pièces de structure entre-elles. On se propose d'étudier le collage d'un triangle automobile en fibre de carbone sur une rotule en aluminium (figure N°1).

On considère que la colle est uniformément répartie dans le joint. La modélisation du problème est la suivante :

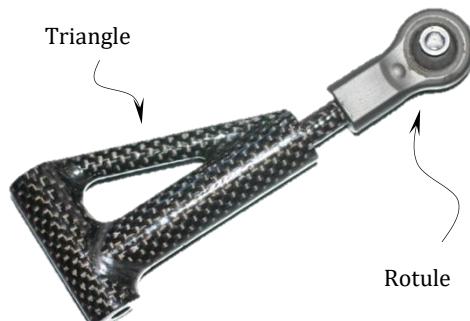


Figure N°1 : Vue du triangle

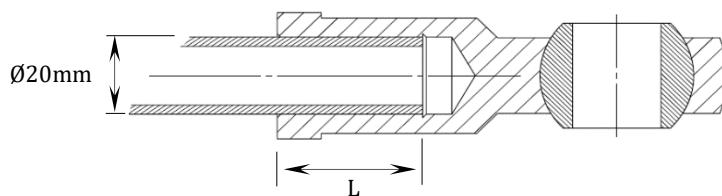


Figure N°2 : Vue en coupe de la liaison

**Question N°1 :** Déterminez l'expression de la surface du joint collé en fonction de L et  $\phi$ . Cette surface est formée par la jonction entre le triangle et la rotule.

**Question N°2 :** Sachant que l'effort maximal auquel l'assemblage est soumis est de 15kN, que le coefficient de sécurité employé est de 2 et que la résistance au cisaillement de la colle est de 15 MPa, déterminez la longueur L d'implantation du joint.

**Question N°3 :** Déterminez l'angle de glissement sachant que le module de Coulomb de la colle est de  $G=600$  MPa.

**Question N°4 :** L'épaisseur de colle est de 0,5 mm. Déterminez le déplacement relatif entre le triangle et la rotule lorsque la charge de 15 kN est appliquée. Le cahier des charges impose un déplacement max de  $5 \times 10^{-3}$  mm. Est-ce que l'assemblage répond aux contraintes du CdCf ? Déterminez la nouvelle longueur d'implantation.

### CORRECTION

**Question N°1 :** La surface sollicitée (notée  $S_{sol}$ ) est une surface cylindrique. Son expression, fonction des différents paramètres du problème est la suivante :

$$S_{sol} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\phi}{2} \cdot L = \pi \cdot \phi \cdot L = \pi \cdot 20 \cdot L$$

**Question N°2 :** La contrainte tangentielle admissible (notée  $\tau_{e-colle}$ ) de la colle est de :

$$\tau_{e-colle} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ MPa}$$

L'assemblage est soumis à un effort tangentiel de 15kN. Cet effort engendre une contrainte, elle aussi tangentielle (notée  $\tau$ ) de :

$$\tau = \frac{15 \cdot 10^3}{S_{sol}}$$

Or  $\tau = \tau_{e\text{-colle}}$

En injectant le résultat de la question N°1, on obtient :

$$7,5 = \frac{15 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20 \cdot L}$$

Ainsi :

$$L = \frac{15 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20 \cdot 7,5} = 31,8 \text{ mm}$$

La longueur à implanter est de 31,8 mm

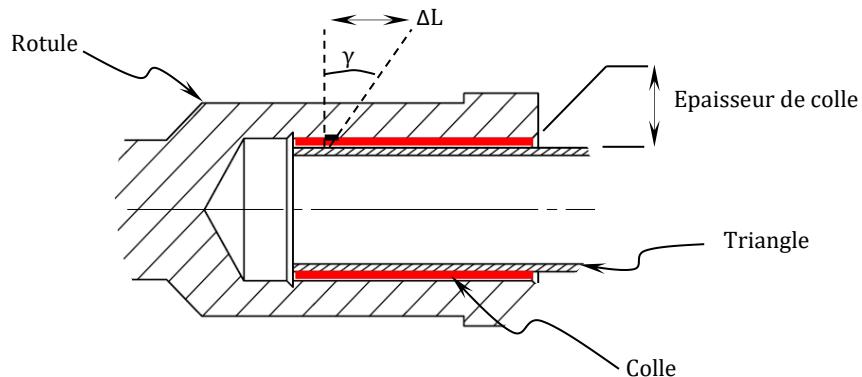
Question N°3 : On donne :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

En utilisant les données de la question précédente :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{7,5}{600} = 0,0125 \text{ rad}$$

Question N°4 : On illustre le phénomène de glissement par la figure suivante :



Ainsi :

$$\Delta L = \text{epaisseur} \cdot \tan \gamma = 0,5 \cdot \tan 0,0125 = 0,0063 \text{ mm}$$

Le cahier des charges n'est pas respecté. Il convient alors de revoir le dimensionnement. Pour ce faire, faisons le chemin dans l'autre sens. Finalement :

$$L = \frac{15 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20 \cdot 600 \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,5} \right]} = 39,79 \text{ mm}$$

$$\text{avec : } \tau = G \cdot \gamma = G \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{\Delta L}{e} \right]$$

Il est alors impératif de vérifier la contrainte de cisaillement de la colle pour valider le dimensionnement :

$$\tau = \frac{15 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20 \cdot 39,79} = 6 < 7,5 \text{ donc OK}$$

## ★★★ Problème N°23 : Optimisation d'un collage

On se propose d'étudier le collage structural de deux pièces. Pour maximiser la résistance du joint, une taille en « biseau » est retenue par le bureau d'étude (figure N°1). Toutefois, aux vues des caractéristiques de la colle il est nécessaire de prévoir l'angle et la largeur avec lesquels chaque pièce doit être préparée.

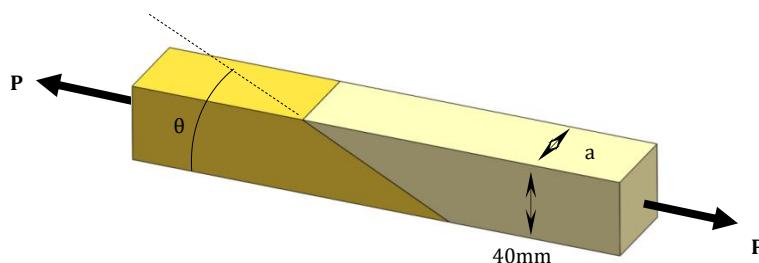


Figure N°1 : Configuration du joint collé

La colle utilisée pour réaliser cet assemblage a les caractéristiques suivantes :

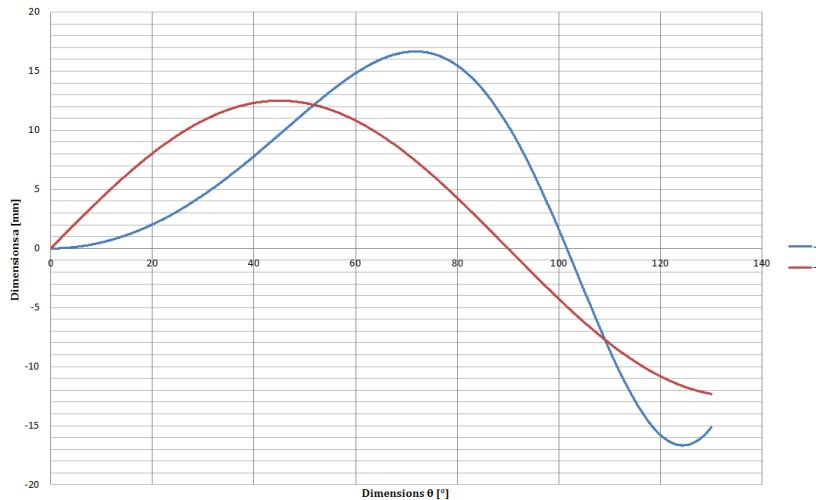
<b>SikaForce® - 7720 L105</b>		
Colle bi-composant thixotrope pour assemblage		
Résistance à la traction (ISO 527 / CQP 545-2)		15 N/mm <sup>2</sup> environ
Allongement à la rupture (ISO 527 / CQP 545-2)		6% environ
Résistance en cisaillement (DIN EN 1465 / CQP 546-2)		10 N/mm <sup>2</sup> environ

Figure N°2 : Caractéristiques de la colle (extrait du catalogue SIKA)

Répondez aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Exprimez la surface collée en fonction des paramètres du problème.
- Question N°2 :** Exprimez l'effort normal à la surface en fonction de P et θ. Donnez l'expression de la contrainte normale à cette surface.
- Question N°3 :** Exprimez l'effort tangentiel à la surface collée en fonction de P et θ. Donnez l'expression de la contrainte tangentielle à cette surface.
- Question N°4 :** Recherchez la valeur à donner aux différents paramètres à partir du graphique ci-dessous afin que le collage puisse résister à un effort de 10kN. Le coefficient de sécurité adopté est de 1.

### Résolution graphique



### CORRECTION

Question N°1 : L'expression de la surface collée (notée  $S_{collée}$ ) est :

$$S_{collée} = L_{collé} \cdot a = \frac{40}{\sin \theta} \cdot a$$

Question N°2 : L'effort normal à la surface s'exprime ainsi :

$$F_{normal} = P \cdot \sin \theta$$

La contrainte normale induite est donc :

$$\sigma_{normale} = \frac{F_{normal}}{S_{collée}} = \frac{P \cdot \sin^2 \theta}{40 \cdot a}$$

Question N°3 : L'effort tangentiel à la surface s'exprime ainsi :

$$T_{tangential} = P \cdot \cos \theta$$

La contrainte tangentiale induite est donc :

$$\tau_{tangentielle} = \frac{T_{tangential}}{S_{collée}} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{40 \cdot a}$$

Question N°4 : On obtient donc un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \sigma_{normale} = \frac{P \cdot \sin^2 \theta}{40 \cdot a} \\ \tau_{tangentielle} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{40 \cdot a} \end{cases}$$

En réalisant l'application numérique :

$$\begin{cases} 15 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \sin^2 \theta}{40 \cdot a} & (1) \\ 10 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{40 \cdot a} & (2) \end{cases}$$

Il convient alors d'exprimer chacune des équations sous la forme  $a=f(\theta)$  et d'utiliser la résolution graphique fournie dans l'exercice. Ainsi :

$$\begin{cases} a = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \sin^2 \theta}{40 \cdot 15} & (1) \\ a = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{40 \cdot 10} & (2) \end{cases}$$

Les lois de Simpson permettent d'écrire :

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

Finalement :

$$\begin{cases} a = 16,6 \cdot \sin^2 \theta & (1) \\ a = 12,5 \cdot \sin 2\theta & (2) \end{cases}$$

Graphiquement on obtient :  $a=12,1$  mm et  $\theta=51,8^\circ$

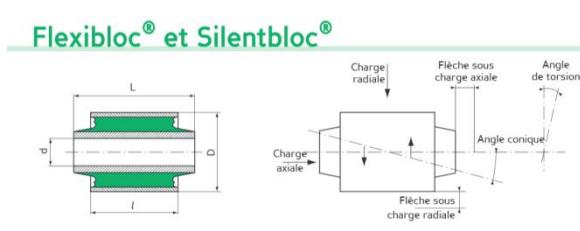
## ★★★ Problème N°24 : Etude d'un Flexibloc

Pour limiter la transmission des vibrations d'un élément vers un autre, il est courant d'utiliser des éléments élastiques (silentbloc, flexibloc,...). La figure N°1 illustre l'un de ces éléments qui se compose de deux tubes métalliques concentriques entre lesquels une matrice polymère est insérée. On les retrouve notamment sur la fixation du moteur thermique d'une voiture sur le châssis.



Figure N°1 : Flexibloc

On se propose d'étudier les caractéristiques d'un Flexibloc. Pour cela le constructeur donne :



d (mm)	D (mm)	L (mm)	l (mm)	Obs	RADIAL		TORSION		AXIAL		CONIQUE		Référence
					Charge statique (daN)	Flèche (mm)	Angle maxi (degré)	Charge statique (daN)	Flèche (mm)	Angle maxi (degré)	Flèche (mm)	Angle maxi (degré)	
10	22	19	15	561206 861112 561112 561207 861114 861607 561209	40	0,3	25°	15	0,8	6°			
	22	23	20		55	0,03	20°	35	0,4	1°			
	22	24	18		90	0,2	20°	15	0,4	2°			
	22	30	25		100	0,2	20°	40	1,5	3°			
	22	33	30		110	0,03	20°	70	0,6	1°			
	22	34	30		55	0,1	30°	35	0,3	3°			
	24	22	18		50	0,4	25°	25	0,2	5°			

Figure N°2 : Catalogue PAULSTRA®

Répondez aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Sélectionnez dans la liste précédente, un flexibloc qui permet de résister à une charge axiale de 0,4kN. Déterminez l'angle de glissement de la matrice polymère (noté  $\gamma$ ) lié à l'application de cette charge.

**Question N°2 :** Déterminez la surface du flexibloc qui est cisaillée.

**Question N°3 :** En déduire le module de Coulomb du polymère.

**Question N°4 :** Le coefficient de Poisson du polymère vaut  $\nu=0,5$ . Déterminez le module de Young (noté  $E$ ) de ce matériau.

### CORRECTION

**Question N°1 :** D'après les données du constructeur, le flexibloc qui résiste à une charge axiale de 40daN a les caractéristiques suivantes (référence n°561207) :

- Epaisseur du polymère : 6mm (on néglige les épaisseurs des tubes)
- Longueur de la surface cisaillée : 25mm
- Déplacement axial sous charge : 1,5mm

L'angle de glissement du polymère s'exprime ainsi :

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta L}{e} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1,5}{6} \right) = 0,245 \text{ rad soit } 14,04^\circ$$

**Question N°2 :** La surface du flexibloc qui est cisaillée correspond à la surface qui est colinéaire à l'effort (la force est tangente à la surface => contrainte tangentielle). Cela implique un cylindre de 10mm de diamètre par 25mm de longueur :

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot L = \pi \cdot 10 \cdot 25 = 785,4 \text{ mm}^2$$

**Question N°3 :** Nous savons que :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Et que :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Ainsi :

$$G \cdot \gamma = \frac{T}{S}$$

Il convient simplement d'isoler G (module de Coulomb) :

$$G = \frac{T}{S \cdot \gamma} = \frac{400}{785,4} \cdot \frac{1}{0,245} = 2,08 \text{ MPa}$$

Question N°4 : Soit l'expression liant le module de Young et le coefficient de poisson au module de Coulomb :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ainsi :

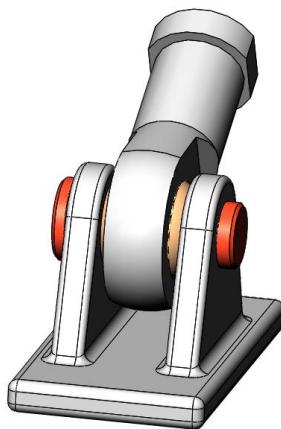
$$E = G \cdot 2(1 + \nu)$$

L'application numérique donne :

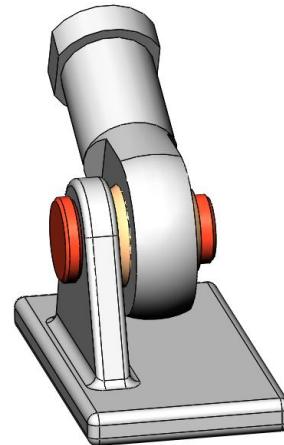
$$E = 2,08 \cdot 2(1 + 0,5) = 6,24 \text{ MPa}$$

### ★★★ Problème N°25 : Montage en chape ou en porte à faux ?

Une articulation, au sens large du terme (liaison pivot) est une liaison mécanique dans laquelle deux pièces sont liées ensemble à l'aide d'un axe (arbre). L'objectif est de permettre un mouvement relatif de rotation entre ces différentes pièces. Il existe deux manières de concevoir ce type de liaison :



Système N°1 : Montage en chape



Système N°2 : Montage en porte à faux

Pour autant, chacune d'entre elles possède ses avantages et ses inconvénients. On se propose de les mettre en évidence au travers de cet exercice. L'axe est réalisé dans un acier dont la limite élastique en cisaillement est  $\tau_e$  (exprimée en MPa). Le système doit pouvoir résister à un effort P (exprimé en N). Le coefficient de sécurité adopté est s.

**Question N°1 :** Déterminez l'expression du diamètre de l'axe à implanter sur le système N°1 pour assurer son bon fonctionnement. Quelles sont les hypothèses de résolution ?

**Question N°2 :** Déterminez l'expression du diamètre de l'axe à implanter sur le système N°2 pour assurer son bon fonctionnement. Quelles sont les hypothèses de résolution ?

**Question N°3 :** Quels sont alors les avantages et les inconvénients d'un montage en chape et d'un montage en porte à faux ?

### CORRECTION

Question N°1 : Pour le montage en chape, il y a deux surfaces cisaillées. Ainsi

$$\frac{\tau_e}{s} = \frac{T}{2 \cdot S_1}$$

Ainsi :

$$\varnothing_{chape} = \sqrt{\frac{T \cdot s \cdot 2}{\tau_e \cdot \pi}}$$

Nous considérons ici que la liaison est sans jeu et que l'axe n'est soumis qu'à du cisaillement pur.

Question N°2 : Pour le montage en porte à faux, il n'y a qu'une seule surface cisaillée. Ainsi :

$$\frac{\tau_e}{s} = \frac{T}{S_2}$$

Ainsi :

$$\varnothing_{paf} = \sqrt{\frac{T \cdot s \cdot 4}{\tau_e \cdot \pi}}$$

Nous considérons ici que la liaison est sans jeu et que l'axe n'est soumis qu'à du cisaillement pur.

Question N°3 : Finalement :

$$\frac{\varnothing_{chape}}{\varnothing_{paf}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

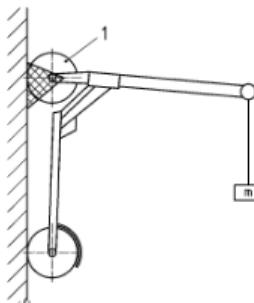
On remarque que le diamètre qu'il convient d'utiliser pour un montage en chape est deux fois plus petit que celui d'un montage en porte à faux (même matériaux, même coefficient de sécurité, même sollicitation). Le choix de l'un ou l'autre des montages est conditionné par l'espace disponible dans le mécanisme. En effet, le montage en chape est plus encombrant axialement (présence d'une deuxième chape) alors que le montage en porte à faux est plus encombrant radialement (axe plus gros).

## ★★★ Problème N°26 : Axe de roue d'une trottinette

On se propose de dimensionner l'axe de la roue avant d'une trottinette de classe A. Pour cela on calque notre modélisation sur l'essai de mise en conformité des trottinettes défini par la norme NF EN 14619 (extrait ci-dessous).

### 5.5.2 Colonne de direction

Étirer au maximum la colonne de direction et la charger au centre en appliquant une masse de 50 kg pour la classe A et de 33 kg pour la classe B, dans les directions A et B, pendant une durée de 5 min chaque fois, comme représenté sur les Figures 4 et 5.

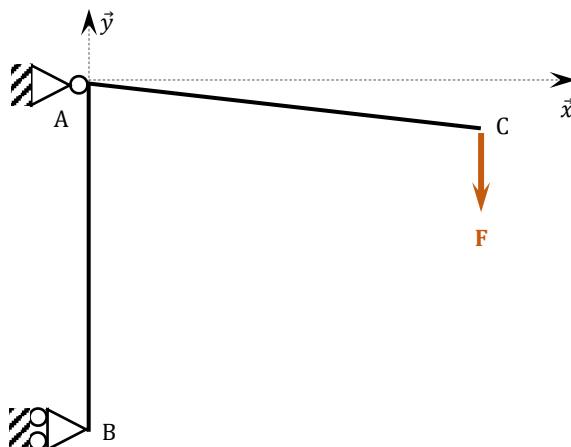


#### Légende

- 1 Exemple de fixation de la roue avant : l'axe de roue est fixé sur le banc et la trottinette peut tourner librement autour de cet axe
- m Masse de 50 kg (classe A) ou 33 kg (classe B)

Figure N°1 : Extrait de la norme NF EN 14619

La modélisation retenue est la suivante :



Soit les paramètres suivants (les distances sont en [mm] et les efforts en [N]) :

- $\vec{AC} = 700\vec{x} - 40\vec{y}$
- $\vec{AB} = -700\vec{x}$
- $\vec{F} = -500\vec{y}$
- Diamètre de l'axe de roue : 10mm
- Coefficient de sécurité : 2

Figure N°2 : Modélisation de la trottinette

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

- Question N°1 :** Déterminez, en utilisant la méthode de votre choix (statique analytique ou statique graphique) les actions de liaisons aux points A (pivot) et B (ponctuelle).
- Question N°2 :** Déterminez la contrainte moyenne et maximale (figure N°2) de l'axe de la roue avant de la trottinette sachant que le montage est réalisé en chape.
- Question N°3 :** Sélectionnez dans la liste suivante (tableau N°1), le matériau qui répond aux exigences de résistance de l'axe. Calculez alors le coefficient de sécurité obtenu.

Type	Désignation	$\tau_{\text{admissible}} [\text{MPa}]$
Acier de construction	S235	135
Acier faiblement allié	36NiCrMo16	600
Alliage d'aluminium	EN AW-2017	115

Tableau N°1 : Matériaux utilisables en mécanique générale

type de section	FACTEUR DE FORME EN CISAILLEMENT
section circulaire pleine	$\frac{4}{3}$
section circulaire creuse	$\frac{4}{3} \left( 1 + \frac{r R}{(r^2 + R^2)} \right)$
section rectangle	$\frac{3}{2}$
section losange régulière	$\frac{9}{8}$

Figure N°3 : Facteur de forme en cisaillement

### CORRECTION

Question N°1 : Le BAME donne :

$$\{\tau_A\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{\tau_B\}_B = \begin{Bmatrix} X_B & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \{\tau_C\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_C$$

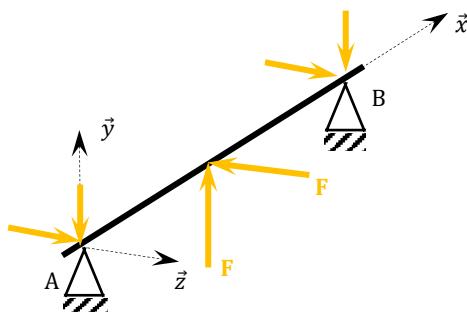
On transpose l'ensemble des torseurs au point A (car ce point comporte le plus grand nombre d'inconnues). Ainsi :

$$\{\tau_A\}_A = \begin{Bmatrix} X_A & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{\tau_B\}_A = \begin{Bmatrix} X_B & - \\ 0 & - \\ - & 700 \cdot X_B \end{Bmatrix}_A \quad \{\tau_C\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -F & - \\ - & -700 \cdot F \end{Bmatrix}_A$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A - F = 0 \\ 700 \cdot X_B - 700 \cdot F = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_A = -F = -500N \\ X_B = F = 500N \\ Y_A = F = 500N \end{cases}$$

Question N°2 : Il est possible de modéliser l'axe de la roue de la façon suivante :



Le calcul du torseur de section donne sur le tronçon ]AB[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \end{Bmatrix}_{G1}$$

Sur le tronçon ]BC[ :

$$\{\tau_{int}\}_{G2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \end{Bmatrix}_{G2}$$

Remarque : La distance entre les appuis et le point d'application de la charge est ici amplifiée pour une meilleure compréhension. Toutefois, sur le modèle réel, cette distance doit être la plus faible possible afin d'éviter l'apparition d'un moment fléchissant (le dimensionnement ne serait plus le même).

Le torseur de section fait apparaître deux termes de cisaillement, un en  $T_y$  et un autre en  $T_z$ . Il convient alors de rechercher un chargement équivalent pour effectuer le dimensionnement. Pour cela, utilisons le théorème de Pythagore :

$$T_{eq} = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} = \sqrt{(-500)^2 + 500^2} = 707,1 \text{ N}$$

Ainsi :

$$\tau_{moy} = \frac{T_{eq}}{2S} = \frac{707,1 \cdot 2}{\pi \cdot 10^2} = 3,2 \text{ MPa}$$

Pour obtenir la contrainte de cisaillement max, il convient d'utiliser le facteur de forme d'une section cylindrique (ici  $\lambda=4/3$ ). Ainsi :

$$\tau_{max} = \lambda \cdot \tau_{moy} = \lambda \cdot \frac{T_{eq}}{2S} = \frac{4}{3} \cdot \frac{707,1 \cdot 2}{\pi \cdot 10^2} = 4,3 \text{ MPa}$$

Question N°3 : Ici tous les matériaux pourraient convenir car la contrainte de cisaillement dans l'axe de roue est très faible. Pour le S235 cela représente un coefficient de sécurité de :

$$s = \frac{135}{4,3} = 31,5$$

## Problèmes de synthèse

## ★★★ Problème N°27 : Etude d'un vélo

### Partie N°1 : Etude du cadre

On considère la modélisation plane suivante (figure N°1) représentant la structure du cadre formée par l'assemblage de deux triangles équilatéraux de 70cm de côté :

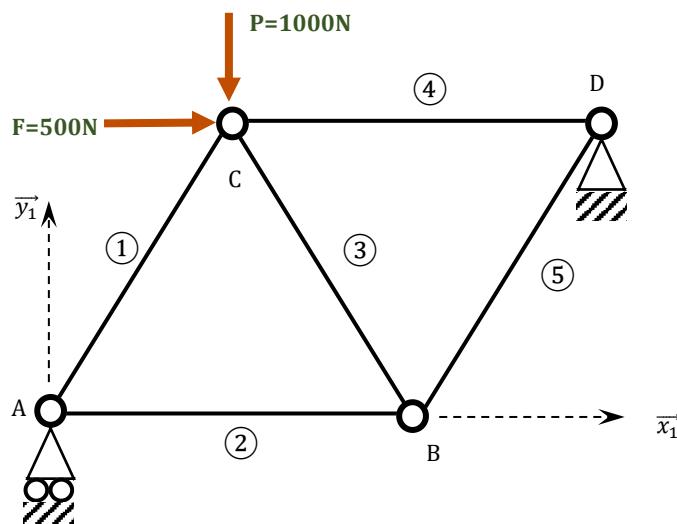


Figure N°1 : Modélisation du cadre de vélo

Le cadre est fabriqué à partir de tube circulaire en alliage d'aluminium 1050A dont les caractéristiques sont :

- Epaisseur des parois du tube (e[mm]) : 2
- Limite d'élasticité du matériau (Re [MPa]) : 35
- Module de Young du matériau (E[GPa]) : 70

Le cahier des charges retenu pour la conception du cadre impose un coefficient de sécurité de 5. Répondez aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Montrez que les actions de liaison aux points A et D sont :

$$\{\tau_A\}_{A,R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 666,7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A,R_1} \text{ [N; Nm]} \quad \{\tau_D\}_{D,R_1} = \begin{pmatrix} -500 & 0 \\ 333,3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{D,R_1} \text{ [N; Nm]}$$

**Question N°2 :** A l'aide de la méthode de Ritter, donnez les efforts intérieurs dans chacune des barres. Consignez vos résultats dans un tableau.

**Question N°3 :** Calculez le diamètre extérieur du tube à implanter sachant que la barre (5) est soumise à un effort normal de 1000N (résultat indépendant des questions précédentes).

**Question N°4 :** Choisir dans le catalogue constructeur suivant un diamètre normalisé de tube qui pourrait convenir à la réalisation de la barre (5).



Tube circulaire - Alliage d'aluminium 1050A

Dimensions ( $\varnothing_{\text{ext}} \times \text{épaisseur [mm]}$ ) :	20x1	20x2	22x1	22x2	25x1	25x2	30x1	30x2
--	------	------	------	------	------	------	------	------

Tableau N°1 : Dimensions normalisées (source : Vignon Choquit.fr)

### CORRECTION

Question N°1 : Le BAME donne :

$$\{\tau_D\}_D = \begin{pmatrix} X_D & - \\ Y_D & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_D \quad \{\tau_A\}_A = \begin{pmatrix} 0 & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_A \quad \{\tau_C\}_C = \begin{pmatrix} 500 & - \\ -1000 & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_C$$

On transpose l'ensemble des torseurs au point D (car ce point comporte le plus grand nombre d'inconnues). Ainsi :

$$\{\tau_D\}_D = \begin{pmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_D \quad \{\tau_A\}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1050 \cdot Y_A \end{pmatrix}_D \quad \{\tau_C\}_D = \begin{pmatrix} 500 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 700 \cdot 10^3 \end{pmatrix}_D$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_D + 500 = 0 \\ Y_A + Y_D - 1000 = 0 \\ -1050 \cdot Y_A + 700 \cdot 10^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_D = -500N \\ Y_A = 666,7N \\ Y_D = 333,3N \end{cases}$$

Question N°2 : Les efforts normaux dans les barres sont :

Barre ① :	-769,8N - Effort de compression. Coupe 1 autour de A
Barre ② :	384,9N - Effort de traction. Coupe 1 autour de A
Barre ③ :	-384,9N - Effort de compression. Coupe 3 autour de B
Barre ④ :	-692,5N - Effort de compression. Coupe 2 autour de D
Barre ⑤ :	384,9 - Effort de traction. Coupe 2 autour de D

Question N°3 et 4 : L'effort normal dans le tube N°5 vaut  $N_{x(5)} = 1000N$ . Ainsi :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{4 \cdot N_x}{\pi \cdot (D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2)}$$

Or :

$$D_{\text{int}} = D_{\text{ext}} - 2 \cdot e$$

Ainsi :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{N_x}{\pi \cdot (e \cdot D_{\text{ext}} - e^2)}$$

Finalement :

$$D_{\text{ext}} = \frac{N_x \cdot s}{\pi \cdot R_e \cdot e} + e$$

L'application numérique donne ( $N_x=1000N$ ,  $e=2mm$ ,  $R_e=35MPa$ ,  $s=5$ ) :

$$D_{\text{ext}} = 24,7mm$$

On retient donc un tube de 25x2mm.

## Partie N°2 : Installation du porte-bidon

On se propose à présent de vérifier l'influence d'un trou dans la barre ⑤ servant à l'installation d'un support de bidon (figure N°2). Ce trou permet de fixer le porte bidon à l'aide d'une vis.

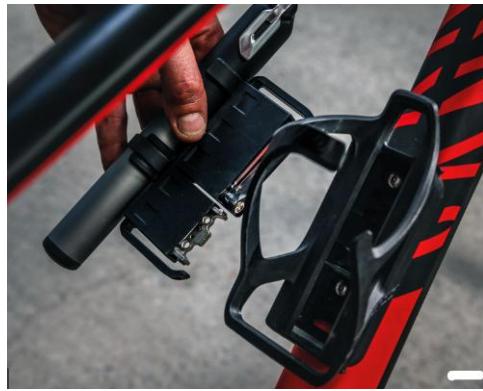


Figure N°2 : Vue du support de bidon

Dans cette partie, la barre ⑤ est réalisée à partir d'un tube circulaire de diamètre 25mm et d'épaisseur 2,5mm. Le matériau employé est le même que celui utilisé dans la partie N°1. Soit la modélisation suivante du problème :

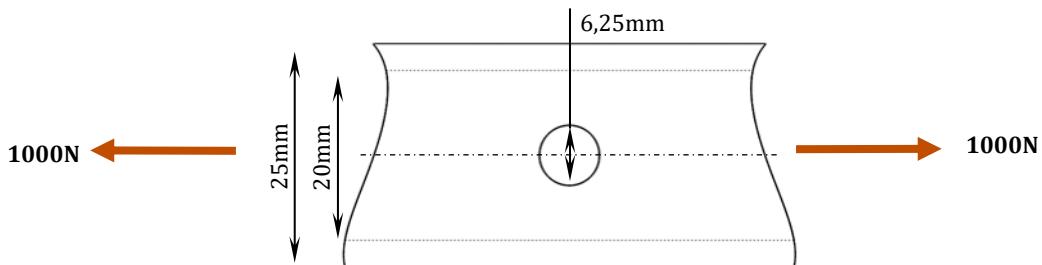


Figure N°3 : Modélisation pour l'implantation du porte bidon

Répondez aux questions suivantes :

- Question N°5 :** Déterminez le coefficient de concentration de contrainte à partir de l'annexe N°1.
- Question N°6 :** Déterminez la contrainte nominale au sein de la barre ⑤
- Question N°7 :** Déterminez la contrainte maximale au sein de la barre ⑤
- Question N°8 :** Conclure quant au dimensionnement de la barre ⑤ (Rappel : coefficient de sécurité adopté égal à 5) et si nécessaire, proposer une solution technologique différente pour répondre à la problématique de fixation du support de bidon.

## CORRECTION

Question N°5 : Il convient de calculer :

$$- \quad \frac{D_{int}}{D_{ext}} = \frac{20}{25} = 0,8$$

$$- \frac{a}{D_{\text{ext}}} = \frac{6,25}{25} = 0,25$$

Graphiquement, on trouve  $K_t = 3,6$

Question N°6 : La contrainte nominale dans la barre N°5 vaut :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4 \cdot N_x}{\pi \cdot (D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2)}$$

L'application numérique donne ( $N_x = 1000\text{N}$ ,  $D_{\text{ext}} = 25\text{mm}$ ,  $D_{\text{int}} = 20\text{mm}$ ) :

$$\sigma_{\text{nom}} = 5,7\text{MPa}$$

Question N°7 : La contrainte maximale au bord du trou est donnée par :

$$\sigma_{\text{max}} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$$

L'application numérique donne :

$$\sigma_{\text{max}} = 20,4\text{MPa}$$

Question N°8 : La contrainte au sein de la barre N°5 ne répond pas aux contraintes du cahier des charges. En effet :

$$\sigma_{\text{max}} > \frac{R_e}{s}$$

On pourrait utiliser par exemple des colliers de serrage ou de la colle pour fixer le porte-bidon.

### Partie N°3 : Etude de l'axe supportant la roue arrière

On se propose dans cette partie de dimensionner l'axe supportant la roue arrière du vélo. Pour ce faire, on considère que la roue est montée en chape comme illustré au travers de la figure ci-dessous (figure N°4).



Figure N°4 : Montage de la roue arrière d'un vélo

Le matériau utilisé pour réaliser l'axe a les caractéristiques suivantes :

- Limite d'élasticité en cisaillement ( $R_e$  [MPa]) : 70
- Module de Young du matériau ( $E$  [GPa]) : 210
- Coefficient de Poisson : 0,3

Le cahier des charges retenu impose les éléments suivants :

- Charge max au centre de la liaison ( $F_{\text{liaison}}$  [N]) : 2000
- Coefficient de sécurité : 5

Répondez aux questions suivantes :

**Question N°9 :** Calculez le module de Coulomb du matériau employé pour la réalisation de l'axe d'articulation.

**Question N°10 :** Indiquez le nombre de surface(s) participant à la cohésion de l'articulation (surface(s) cisaillée(s)).

**Question N°11 :** Calculez le diamètre minimal de l'axe assurant la bonne tenue de l'articulation (facteur de forme  $\lambda=4/3$ ).

### CORRECTION

Question N°9 : Le module de Coulomb est donné par les deux autres constantes du matériau. A savoir :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

L'application numérique donne ( $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0,3$ ) :

$$G = 80,8\text{GPa}$$

Question N°10 et 11 : Il s'agit d'un montage en chape, il y a donc deux surfaces cisaillées. De plus :

$$\frac{R_{eg}}{s} = \lambda \cdot \frac{2T}{\pi \cdot D^2}$$

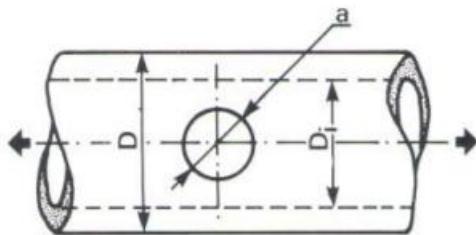
Finalement :

$$D = \sqrt{\lambda \cdot \frac{2 \cdot s \cdot T}{R_{eg} \cdot \pi}}$$

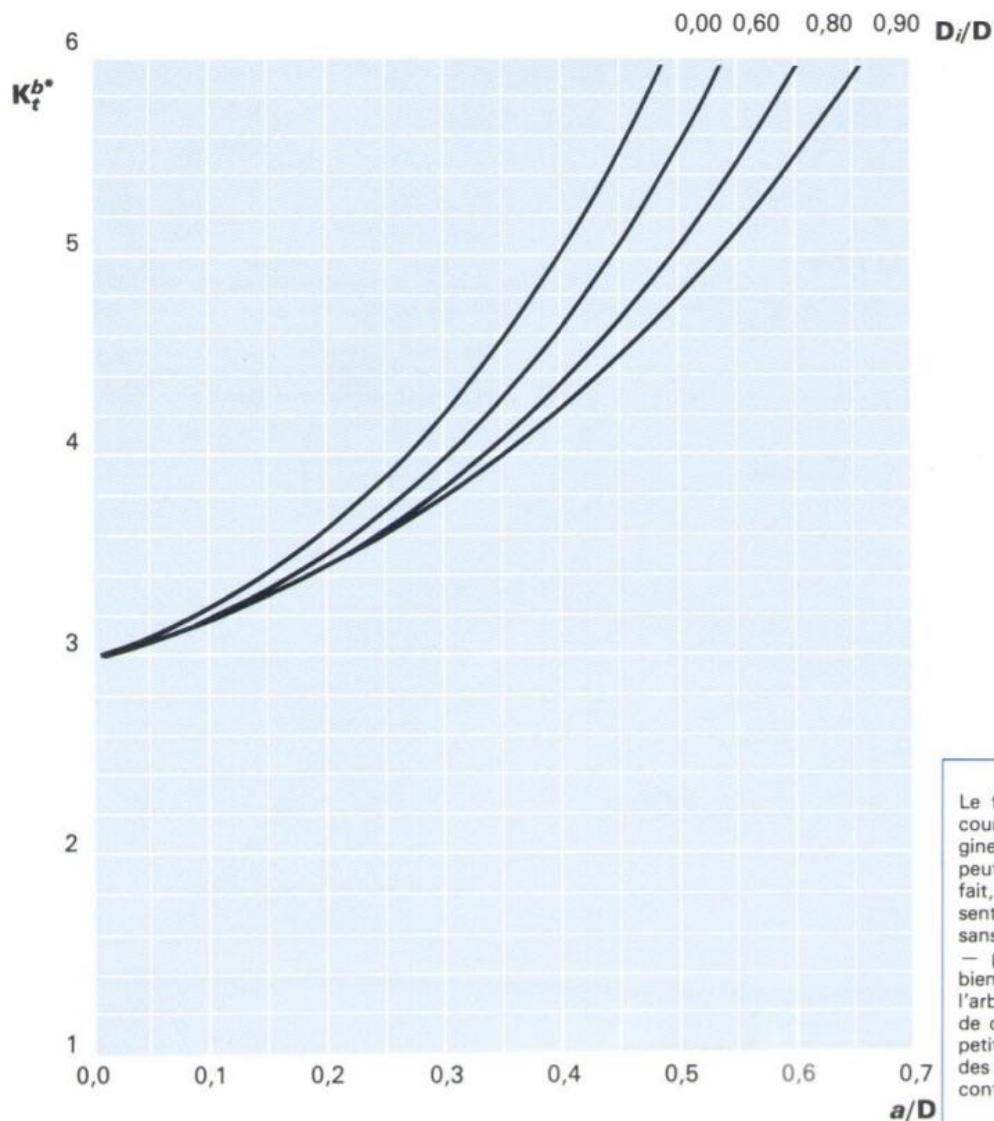
L'application numérique donne ( $\lambda=4/3$ ,  $s=5$ ,  $R_{eg}=70\text{MPa}$ ,  $T=2000\text{N}$ ) :

$$D = 11\text{mm}$$

## Annexe N°1 : Détermination d'un coefficient de concentration de contrainte



$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{4 P}{\pi (D^2 - D_i^2)}$$



Le fait que toutes les courbes aient leur origine au point  $K_t^{(b)} = 3$  peut surprendre. En fait, ce point ne représente pas l'arbre creux sans trou transversal — pour lequel  $K_t$  est bien égal à 1 — mais l'arbre creux avec trou de diamètre infiniment petit qui engendre bien des concentrations de contraintes.

## ★★★ Problème N°28 : Etude d'une grue

Une grue de type GTMR (Grue à Tour à Montage Rapide) (figure N°1) est un appareil de manutention que l'on retrouve essentiellement sur des chantiers de construction d'infrastructures ou de bâtiments. Elle se caractérise par une forte capacité de chargement ainsi qu'une grande modularité. En effet il est possible d'accroître très facilement la hauteur du mât afin d'obtenir une plus grande hauteur sous crochet. On se propose d'étudier le comportement sous charge de la grue afin de dimensionner sa partie haute (tirants, flèche et contre-flèche).

Pour se faire, on considère la modélisation suivante :

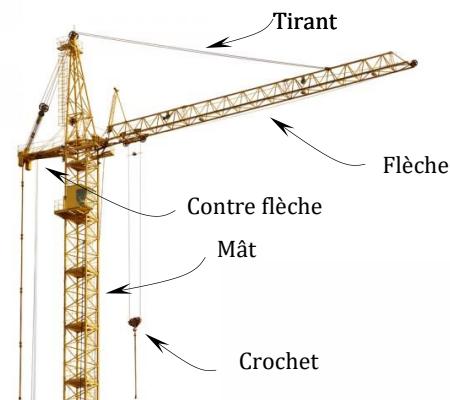


Figure N°1 : Vue d'une grue type GTMR

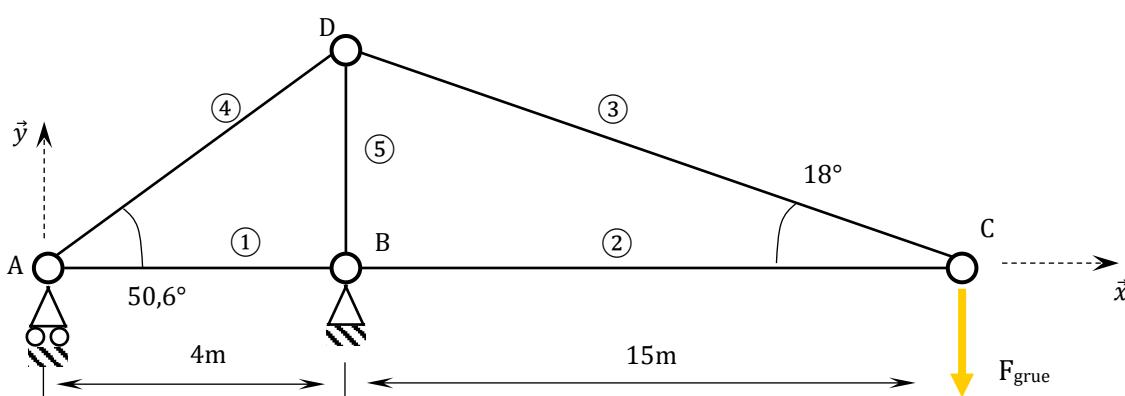


Figure N°2 : Modélisation de la partie haute de la grue

Le cahier des charges retenu pour la conception de la grue est le suivant :

- Limite d'élasticité du matériau ( $Re$  [MPa]) : 500
- Module de Young du matériau ( $E$  [GPa]) : 210
- Module de Coulomb du matériau ( $G$  [GPa]) : 82
- Coefficient de sécurité adopté : 3
- Charge en bout de flèche ( $F_{grue}$  [kN]) : 15

### Partie N°1 : Etude de la structure de la grue

Répondez dans l'ordre aux questions suivantes :

**Question N°1 :** Déterminez les actions de liaison au point A et B.

**Question N°2 :** A l'aide de la méthode de Ritter, donnez les efforts intérieurs dans chacune des barres.

**Question N°3 :** Sachant que le tirant ③ composant cette grue est une barre cylindrique, déterminez son diamètre afin de respecter le cahier des charges.

**Question N°4 :** Déterminez la longueur après déformation du tirant ③ (2 chiffres après la virgule).

**Question N°5 :** Déterminez la variation de diamètre du tirant ③ après déformation (4 chiffres après la virgule).

## CORRECTION

Question N°1 : Le BAME donne :

$$\{\tau_A\}_A = \begin{pmatrix} 0 & - \\ Y_A & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_A \quad \{\tau_B\}_B = \begin{pmatrix} X_B & - \\ Y_B & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_B \quad \{\tau_C\}_C = \begin{pmatrix} 0 & - \\ -15000 & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C$$

On transpose l'ensemble des torseurs au point B (car ce point comporte le plus grand nombre d'inconnues). Ainsi :

$$\{\tau_B\}_B = \begin{pmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B \quad \{\tau_A\}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & -4 \cdot Y_A \\ 0 & -4 \cdot Y_A - 225 \cdot 10^3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \tau_C\}_B \\ 0 & 0 \\ 0 & -225 \cdot 10^3 \end{pmatrix}_B$$

L'application du PFS donne :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B - 15000 = 0 \\ -4 \cdot Y_A - 225 \cdot 10^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_D = 0N \\ Y_A = -56250N \\ Y_B = 71250N \end{cases}$$

Question N°2 : Les efforts normaux dans les barres sont :

Barre ① :	$\approx -46204,3N$ - Effort de compression. Coupe 2 autour de A
Barre ② :	$\approx -46165,3N$ - Effort de compression. Coupe 1 autour de C
Barre ③ :	$\approx 48541N$ - Effort de traction. Coupe 1 autour de C
Barre ④ :	$\approx 72793,5N$ - Effort de traction. Coupe 2 autour de A
Barre ⑤ :	-71250N - Effort de compression. Coupe 3 autour de B

Question N°3 : L'effort normal dans la barre vaut  $N_{x(3)} = 48541N$ . Ainsi :

$$\frac{R_e}{s} = \frac{4 \cdot N_x}{\pi \cdot D^2}$$

Finalement :

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot N_x \cdot s}{\pi \cdot R_e}}$$

L'application numérique donne ( $N_x=48541N$ ,  $R_e=500MPa$ ,  $s=3$ ) :

$$D = 19,3mm$$

On pourrait donc retenir une barre de diamètre normalisé de 20mm

Question N°4 : On donne la loi de Hooke:

$$\sigma_{traction} = \frac{4 \cdot N_x}{\pi \cdot D^2} = E \cdot \frac{(L_{(3)} - L_{0-(3)})}{L_{0-(3)}}$$

Ainsi :

$$L_{(3)} = \frac{4 \cdot N_x \cdot L_{0-(3)}}{\pi \cdot D^2 \cdot E} + L_{0-(3)}$$

De plus :

$$L_{0-(3)} = \frac{L_{0-(2)}}{\cos \alpha}$$

Finalement :

$$L_{(3)} = \frac{4 \cdot N_x \cdot L_{0-(2)}}{\pi \cdot D^2 \cdot E \cdot \cos \alpha} + \frac{L_{0-(2)}}{\cos \alpha}$$

L'application numérique donne ( $L_{0-(2)}=15\,000\text{mm}$ ,  $N_x=48541\text{N}$ ,  $D=19,3\text{mm}$ ,  $\alpha=18^\circ$ ,  $E=210\,000\text{MPa}$ ) :

$$L_{(3)} = 15\,784,39\text{mm}$$

Question N°5 : Le coefficient de Poisson est donné par :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{(D_{(3)} - D_{0-(3)}) \cdot L_{0-(3)}}{(L_{(3)} - L_{0-(3)}) \cdot D_{0-(3)}}$$

Ainsi :

$$[D_{(3)} - D_{0-(3)}] = -\frac{\nu \cdot (L_{(3)} - L_{0-(3)}) \cdot D_{0-(3)}}{L_{0-(3)}}.$$

De plus :

$$\nu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

Finalement :

$$[D_{(3)} - D_{0-(3)}] = -\left[\left(\frac{E}{2 \cdot G} - 1\right) \cdot \frac{(L_{(3)} - L_{0-(3)}) \cdot D_{0-(3)}}{L_{0-(3)}}\right]$$

L'application numérique donne :

$$[D_{(3)} - D_{0-(3)}] = -4,277 \cdot 10^3 \text{mm}$$

## Partie N°2 : Etude de la liaison du tirant et de la flèche

On se propose d'étudier la fixation du tirant (3) sur la flèche (2). Cette dernière est réalisée à l'aide d'un montage en chape (figure N°3). Ce montage se compose d'une rotule reliée au tirant, d'une chape solidaire de la flèche et d'un axe soumis à du cisaillement pur. Ce dernier est réalisé dans un acier dont la limite élastique en cisaillement est de 100MPa, le module de Coulomb de 80,77GPa et  $\nu=0,3$ . Le coefficient de sécurité adopté pour le dimensionnement est identique à celui utilisé précédemment.

L'effort sur le tirant (3) sera considéré comme étant égal à 200kN (résultat indépendant des questions précédentes).

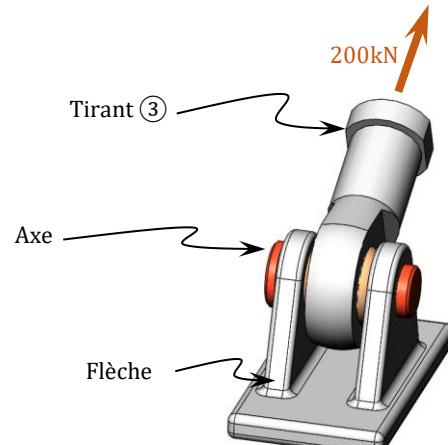


Figure N°3 : Montage en chape

**Question N°6 :** Indiquez le nombre de surface(s) participant à la cohésion de l'articulation (surface(s) cisaillée(s)).

**Question N°7 :** D'après les caractéristiques du matériau, quelle est la contrainte maximale admissible en cisaillement.

**Question N°8 :** Calculez le diamètre minimal de l'axe assurant la bonne tenue de l'articulation.

**Question N°9 :** Calculez l'angle de distorsion lorsque l'axe est sollicité.

Il convient à présent de vérifier le dimensionnement de la liaison rotule/tirant ③. Pour ce faire, on considère la géométrie suivante :

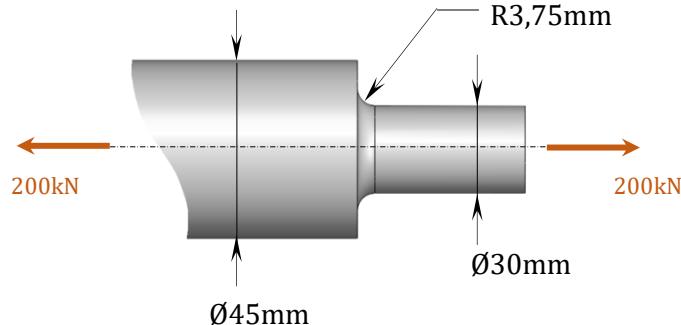


Figure N°4 : Vue de l'usinage du tirant ③ permettant d'accueillir la rotule

**Question N°10 :** Calculez au niveau de l'épaulement : La contrainte nominale, le coefficient de concentration de contrainte (à l'aide de l'annexe N°1) ainsi que la contrainte max induite par cette singularité géométrique. Calculez alors le nouveau coefficient de sécurité de cette liaison sachant que la limite d'élasticité du matériau est de 500MPa.

### CORRECTION

Question N°6 : Le tirant est monté en chape, ainsi il y a deux surfaces qui participent à la cohésion de l'articulation.

Question N°7 : La contrainte maximale admissible est donnée par :

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_e}{s} = \frac{100}{3} = 33,33 \text{ MPa}$$

Question N°8 : On donne :

$$\frac{\tau_e}{s} = \frac{2T}{\pi \cdot D^2}$$

Finalement :

$$D = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot T}{\tau_e \cdot \pi}}$$

L'application numérique donne ( $s=3$ ,  $\tau_e=100 \text{ MPa}$ ,  $T=200 \text{ 000 N}$ ) :

$$D = 61,8 \text{ mm}$$

Question N°9 : On donne :

$$\tau = G \cdot \gamma = \frac{2T}{\pi \cdot D^2}$$

Donc :

$$\gamma = \frac{2T}{G \cdot \pi \cdot D^2}$$

L'application numérique donne :

$$\gamma = 4,13 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Question N°10 : La contrainte nominale au pied de la singularité géométrique vaut :

$$\sigma_{nom} = \frac{4 \cdot N_x}{\pi \cdot D^2} = 282,9 \text{ MPa}$$

Le coefficient de concentration de contrainte est déterminé en calculant les paramètres ci-dessous :

- $\frac{r}{t} = \frac{3,75}{7,5} = 0,5$
- $\frac{d}{D} = \frac{30}{45} = 0,67$

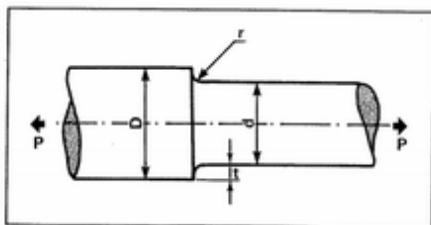
Graphiquement, on trouve  $K_t = 1,8$

Ainsi, la contrainte maximale vaut :

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} = 509,2 \text{ MPa}$$

Ben là... le tirant de la grue plastifie !!!!

### Annexe N°1 - Arbre épaulé - Traction



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4 P}{\pi d^2}$$

